Лекции по группам и алгебрам Ли – 2,3

Еще примеры алгебр Ли

Матричная алгебра, рассматриваемая как алгебра Ли относительно операции коммутатора, обозначается $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ (или просто $\mathfrak{gl}_n$). Следующие попространства в $\mathfrak{gl}_n$ являются подалгебрами Ли (т.е. замкнуты относительно операции коммутатора):

(1) подпространство скалярных матриц $\mathbb{C}E$ (это, более того, идеал в $\mathfrak{gl}_n$),
(2) подпространство матриц с нулевым следом $\mathfrak{sl}_n$ (это тоже идеал в $\mathfrak{gl}_n$),
(3) подпространство строго верхнетреугольных матриц $\mathfrak{n}_+(n)$,
(4) подпространство нестрого верхнетреугольных матриц $\mathfrak{b}_+(n)$,
(5) подпространство кососимметрических матриц $\mathfrak{so}_n$: в самом деле, если $A^T = -A$, $B^T = -B$, то $(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T$.

Предложение 1. $\mathfrak{n}_+(3)$ *есть алгебра Гейзенберга, а* $\mathfrak{b}_+(2)$ *есть прямая сумма одномерной и двумерной неабелевой алгебры Ли.*

Представления: словарик

Определение 1. *Представлением* алгебры Ли L в векторном пространстве V называется гомоморфизм $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Определение 2. Представление (V, ρ) называется *точным*, если гомоморфизм ρ инъективен.

Определение 3. *Подпредставлением* представления (V, ρ) называется подпространство $V' \subset V$, инвариантное относительно всех операторов $\rho(x)$, $x \in L$. Представление называется *неприводимым*, если любое его подпредставление есть либо V, либо 0.

Определение 4. Пусть (V_1, ρ_1) и (V_2, ρ_2) – представления алгебры Ли L. *Прямая сумма* этих представлений – это представление в пространстве $V_1 \oplus V_2$, такое, что $\rho(x)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(x)v_1 \oplus \rho_2(x)v_2$. Представление называется *неразложимым*, если оно не представляется в виде прямой суммы собственных подпредставлений.

Определение 5. Представление называется *вполне приводимым*, если каждое его подпредставление выделяется прямым слагаемым (т.е. для любого подпредставления $V' \subset V$ существует подпредставление $V'' \subset V$ такое, что $V = V' \oplus V''$).

Предложение 2. *Вполне приводимое конечномерное представление раскладывается в прямую сумму неприводимых.*

Доказательство. Индукция по размерности представления. Пусть представление V приводимо, тогда оно есть прямая сумма двух слагаемых $V = V' \oplus V''$, каждое из которых есть прямая сумма неприводимых по предположению индукции. □

Примеры представлений

(1) *Тривиальное* представление алгебры Ли L в одномерном пространстве $\mathbb{C}$: $\rho(x) = 0$ для любого $x \in L$.
(2) *Присоединенное* представление алгебры Ли L в пространстве L: по определению $\rho(x) = \operatorname{ad} x$. Из тождества Якоби следует, что это действительно представление: в самом деле, $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x)z = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] = -[z, [x, y]] = [[x, y], z] = \operatorname{ad}[x, y]z$. Следующее предложение очевидно:

Предложение 3. *Подпредставления в присоединенном представлении – это идеалы в алгебре Ли* L. *Алгебра Ли* L *проста тогда и только тогда, когда ее присоединенное представление неприводимо. Присоединенное представление алгебры Ли* L *точно тогда и только тогда, когда центр алгебры Ли* L *тривиален.*

Предложение 4. *Присоединенное представление алгебры Ли* $\mathfrak{gl}_2$ *есть прямая сумма неприводимых* $\mathbb{C}E \oplus \mathfrak{sl}_2$*. В частности, алгебра Ли* $\mathfrak{sl}_2$ *проста.*

Доказательство. В самом деле, $\mathfrak{gl}_2 = \mathbb{C}E \oplus \mathfrak{sl}_2$ как векторное пространство, причем $\mathbb{C}E$ и $\mathfrak{sl}_2$ являются идеалами в $\mathfrak{gl}_2$. Покажем, что представление в пространстве $\mathfrak{sl}_2$ неприводимо (для $\mathbb{C}E$ это очевидно, поскольку $\dim \mathbb{C}E = 1$). Пусть $\{e, h, f\}$ – стандартный базис в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ (см. лекцию 1). Предположим, что элемент $x = ae + bh + cf$ лежит в нетривиальном инвариантном подпространстве $W \subset \mathfrak{sl}_2$. Тогда в том же подпространстве лежит элемент $\operatorname{ad} e(x) = [e, x] = -2be + ch$ и $\operatorname{ad}^2 e(x) = [e, [e, x]] = -2ce$. Таким образом, $e \in W$. Аналогичным образом, отсюда следует, что $\operatorname{ad} f(e) = -h \in W$, а также $\operatorname{ad}^2 f(e) = -2f \in W$, и, таким образом, $W = \mathfrak{sl}_2$. □

(3) *Тавтологическое* представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ (или какой-нибудь ее подалгебры) в пространстве $V = \mathbb{C}^n$: по определению $\rho(x) = x$. Такое представление, очевидно, всегда точно.

Предложение 5. *Тавтологическое представление алгебры Ли* $\mathfrak{gl}_n$ *неприводимо.*

Доказательство. В самом деле, подпредставление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ в тавтологическом представлении $\mathbb{C}^n$ должно быть инвариантно относительно *всех* операторов $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, а таким свойством обладают только $\mathbb{C}^n$ и $\{0\}$. □

Предложение 6. *Тавтологическое представление алгебры Ли* $\mathfrak{n}_+(2)$ *приводимо, но неразложимо.*

Доказательство. Тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{n}_+$ приводимо, так как любая строго верхнетреугольная матрица аннулирует первый базисный вектор, а следовательно, подпространство $W \subset \mathbb{C}^2$, натянутое на первый базисный вектор, инвариантно. С другой стороны, любой вектор, не лежащий в этом подпространстве, можно при помощи строго верхнетреугольной матрицы перевести в ненулевой элемент из W. Таким образом, никакого другого собственного инвариантного подпространства нет, и, следовательно, представление неразложимо. □

Инвариантные формы

Определение 6. Пусть (V, ρ) – представление алгебры Ли L. Билинейная форма $\Phi(\cdot, \cdot)$ на пространстве V называется *инвариантной*, если $\Phi(\rho(x)v_1, v_2) + \Phi(v_1, \rho(x)v_2) = 0$. Инвариантную *симметрическую* билинейную форму называют также *инвариантным скалярным произведением.*

Примеры:

(1) На тавтологическом представлении алгебры Ли $\mathfrak{so}_n$ в n-мерном пространстве инвариантной формой является стандартное скалярное произведение.

(2) На присоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ (коммутаторами в пространстве $n \times n$-матриц) имеется инвариантная форма $\Phi(A, B) := \operatorname{tr} AB$. В самом деле, для любого $x \in \mathfrak{gl}_n$ имеем $\Phi([x, A], B) + \Phi(A, [x, B]) = \operatorname{tr}([x, A]B + A[x, B]) = \operatorname{tr}[x, AB] = 0$.

(3) На том же пространстве $n \times n$-матриц можно определить форму $\Phi(A, B) := \operatorname{tr} AB^T$. Она не инвариантна относительно $\mathfrak{gl}_n$, но инвариантна относительно подалгебры $\mathfrak{so}_n$. Если основное поле есть $\mathbb{R}$, то эта форма положительно определена.

(4) Инвариантная *форма Киллинга* на присоединенном представлении алгебры Ли L определяется как $K(x, y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)$ для $x, y \in L$.

Предложение 7. *Ортогональное дополнение подпредставления относительно инвариантной билинейной формы есть подпредставление.*

Доказательство. Пусть W – подпредставление в V и пусть $v \in W^{\perp}$. Покажем, что $\rho(x)v \in W^{\perp}$ для любого $x \in L$. Для любого $v' \in W$ имеем $\Phi(\rho(x)v, v') = -\Phi(v, \rho(x)v') = 0$ так как $\rho(x)v' \in W$. Таким образом, $\rho(x)v \in W^{\perp}$, ЧТД. □

Следствие 1. *Ядро инвариантной формы есть подпредставление. В частности, ядро формы Киллинга есть идеал в алгебре Ли.*

Следствие 2. *Пусть L – вещественная алгебра Ли, и инвариантная форма на представлении V положительно определена. Тогда представлние V вполне приводимо.*

Доказательство. В самом деле, если W – подпредставление в V, то $V = W \oplus W^{\perp}$. □

Гомоморфизмы представлений

Определение 7. Пусть (V_1, ρ_1) и (V_2, ρ_2) – представления алгебры Ли L. Линейное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется *гомоморфизмом* представлений (или *сплетающим оператором*), если $\varphi\rho_1(x)v = \rho_2(x)\varphi v$ для $x \in L$, $v \in V_1$. Все гомоморфизмы $V_1 \to V_2$ образуют векторное пространствоо, которое обозначается $Hom_L(V_1, V_2)$.

Предложение 8 (Лемма Шура). *Пусть $\varphi : V_1 \to V_2$ – гомоморфизм неприводимых представлений алгебры Ли L. Тогда или $\varphi = 0$, или φ – изоморфизм.*

Доказательство. В самом деле, $\operatorname{Ker}\varphi$ есть подпредставление в V_1, а $\operatorname{Im}\varphi$ – подпредставление в V_2. Поскольку представления неприводимы, имеем либо $\operatorname{Ker}\varphi = V_1$ (и тогда $\varphi = 0$), либо $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ (и тогда $\operatorname{Im}\varphi = V_2$, следовательно φ – изоморфизм). □

Следствие 3. *Пусть основное поле $\mathbb{C}$. Тогда любой эндоморфизм неприводимого представления есть умножение на скаляр.*

Доказательство. Пусть $\varphi : V \to V$ – гомоморфизм, и пусть λ – какое-нибудь собственное значение оператора φ. Тогда $\varphi - \lambda E$ – гомоморфизм, имеющий нетривиальное ядро, и, следовательно, нулевой по лемме Шура. □

Предложение 9. *Подпредставление $V' \subset V$ выделяется прямым слагаемым тогда и только тогда, когда имеется инвариантный проектор на это подпредставление, т.е. такой гомоморфизм $p : V \to V$, что $\operatorname{Im} p = V'$ и $p^2 = p$.*

Доказательство. Действительно, пусть $V = V' \oplus V''$, тогда определим p как тождественный оператор на V' и нулевой на V''. Обратно, если $p : V \to V$ – инвариантный проектор, то $V = V' \oplus \operatorname{Ker} p$. □

Тензорное произведение и двойственность

Определение 8. Пусть (V_1, ρ_1) и (V_2, ρ_2) – представления алгебры Ли L. *Тензорное произведение* этих представлений – это представление алгебры Ли L в пространстве $V_1 \otimes V_2$, в котором элементы алгебры Ли действуют по правилу Лейбница $\rho(x)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(x)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(x)v_2$.

Предложение 10. *Это определение корректно, т.е. $\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = \rho([x, y])$.*

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x))(v_1 \otimes v_2) = \\
&\quad = (\rho_1(x)\rho_1(y) - \rho_1(y)\rho_1(x))v_1 \otimes v_2 + \rho_1(y)v_1\rho_2(x)v_2 + \rho_1(x)v_1\rho_2(y)v_2 - \\
&\quad - \rho_1(y)v_1\rho_2(x)v_2 - \rho_1(x)v_1\rho_2(y)v_2 + v_1 \otimes (\rho_2(x)\rho_2(y) - \rho_2(y)\rho_2(x))v_2 = \\
&= (\rho_1(x)\rho_1(y) - \rho_1(y)\rho_1(x))v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes (\rho_2(x)\rho_2(y) - \rho_2(y)\rho_2(x))v_2 = \rho([x, y])(v_1 \otimes v_2).
\end{aligned}
$$

□

Предложение 11. *Симметрическая степень $S^n V$ и внешняя степень $\Lambda^n V$ являются подпредставлениями в $V^{\otimes n}$.*

Доказательство. Формула для действия алгебры Ли в тензорном произведении симметрична относительно перестановки сомножителей, а следовательно, подпространства симметрических и кососимметрических тензоров инвариантны. □

Определение 9. Пусть (V, ρ) – представление алгебры Ли L. *Двойственное представление* – это представление V^*, ρ^* алгебры Ли L в двойственном пространстве V^*, такое, что $\rho^*(x)f(v) = -f(\rho(x)v)$ для всех $x \in L,\ f \in V^*,\ v \in V$.

Предложение 12. *Это определение корректно, т.е.* $\rho^*(x)\rho^*(y) - \rho^*(y)\rho^*(x) = \rho^*([x, y])$.

Доказательство.

$$(\rho^*(x)\rho^*(y) - \rho^*(y)\rho^*(x))f(v) = -\rho^*(y)f(\rho(x)v) + \rho^*(x)f(\rho(y)v) = \\ = f(\rho(y)\rho(x)v) - f(\rho(x)\rho(y)v) = -f(\rho([x, y])v) = \rho^*([x, y])f(v).$$

□

Следующие предложения следуют из канонического изоморфизма пространства линейных отображений $V \to W$ с пространством $V^* \otimes W$, а также пространства билинейных форм на пространстве V с пространством $V^* \otimes V^*$.

Предложение 13. *Пусть* $V = \mathbb{C}^n$ *– тавтологическое представление алгебры Ли* $\mathfrak{gl}_n$. *Присоединенное представление алгебры Ли* $\mathfrak{gl}_n$ *изоморфно* $V \otimes V^*$.

Определение 10. Пусть (V, ρ) – представление алгебры Ли L. Подпространство *инвариантов* $V^L \subset V$ состоит из элементов $v \in V$ таких, что $\rho(x)v = 0$ для всех $x \in L$.

Предложение 14. $Hom_L(V, W) = (V^* \otimes W)^L$

Предложение 15. *Пространство инвариантных билинейных форм на представлении* V *есть* $(V^* \otimes V^*)^L$.

Неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$

Предложение 16. *Симметрические степени тавтологического представления алгебры Ли* $\mathfrak{sl}_2$ *неприводимы.*

Доказательство. Пусть $\{u, v\}$ – базис в тавтологическом представлении $V = \mathbb{C}^2$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, в котором

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда пространство S^nV есть пространство однородных многочленов от u, v степени n, причем базисные элементы алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ действуют в нем следующими операторами:

$$\rho(e) = u\frac{\partial}{\partial v},\ \rho(f) = v\frac{\partial}{\partial u},\ \rho(h) = u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}.$$

(Это следует из правила Лейбница для действия алгебры Ли в тензорном произведении). Неприводимость представления S^nV теперь будет следовать из следующих двух утверждений:

(1) Всякое нетривиальное инвариантное подпространство в S^nV содержит вектор u^n.

(2) Представление S^nV порождается вектором u^n.

Докажем первое утверждение. Пусть вектор $w = a_0u^n + a_1u^{n-1}v + \ldots + a_nv^n$ лежит в нетривиальном инвариантном подпространстве, и пусть a_k – ненулевой коэффициент с максимальным номером. Тогда вектор $\rho(f)^k w = u^k \frac{\partial^k}{\partial v^k}(a_0u^n + a_1u^{n-1}v + \ldots + a_ku^{n-k}v^k) = k!a_ku^n$ лежит в том же инвариантном подпространстве и пропорционален u^n с ненулевым коэффициентом.

Для доказательства второго утверждения заметим, что вектор $\rho(e)^k u^n = v^k \frac{\partial^k}{\partial u^k} u^n$ пропорционален вектору $u^{n-k}v^k$ с ненулевым коэффициентом. Но такие векторы образуют базис пространства S^nV. □