Дифференциальные уравнения. Листок 10

Задачи 1-5 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Составьте однородное линейное уравнение наименьшей возможной степени, решениями которого являются функции:

$$(а)\quad 1, \cos x; \qquad (б)\quad x, e^x, \qquad (в)\quad x, x^3, |x^3|$$

2. Докажите, что следующие системы функций линейно независимы:

$$(а)\quad \{e^{ax} \mid a \in \mathbb{R}\}; \qquad (б)\quad \{x^a \,|x > 0, a \in \mathbb{R}\};$$
$$(в)\quad \{x^a e^{bx} \mid a, b \in \mathbb{R}\}; \qquad (г)\quad \{\cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Докажите, что отношение любых линейно независимых решений уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ не может иметь точек локального максимума.

4. Докажите, что в случае $q(x)>0$ для любого решения уравнения $y''+q(x)y=0$ отношение $y'(x)/y(x)$ убывает при возрастании x на интервале, где $y(x)\neq 0$.

5. Пусть $y_1(x)$ - решение линейного дифференциального уравнения $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_0(x)y=0$. Докажите, что подстановка $y=z\cdot y_1(x)$ позволяет понизить порядок уравнения.

6. Пусть $a_j(t)$, $j=1,\ldots,n$ - всюду непрерывные функции. Найдите фундаментальную систему решений и определитель Вронского для системы

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n} a_j(t)x_j, \qquad i=1,\ldots,n$$

7. Докажите, что линейное дифференциальное уравнение $x''+a(t)x'+b(t)x=c(t)$ остается линейным при произвольной замене независимой переменной $t\mapsto\varphi(s)$ и линейной заменой $x\mapsto\alpha(t)x+\beta(t)$ переменной x, причем первый тип замен переводит однородные уравнения в однородные. Приведите каждой из этих замен уравнение к виду, не содержащему x'.

8. (*переформулировка задачи 10 листка 8*). Пусть V - пространство решений дифференциального уравнения $x^{(n)}=a_nx^{(n-1)}+\cdots a_2x'+a_1x$. Согласно общей теории, отображение $\varphi: x(t)\mapsto\big(x(0),x'(0),\ldots,x^{(n-1)}(0)\big)$ устанавливает изоморфизм пространств V и $\mathbb{R}^n$. Докажите, что отображение $\frac{d}{dx}$ определяет линейный оператор в V, матрица которого при изоморфизме φ совпадает с матрицей задачи 10 листка 8. Выведите отсюда, что у этого оператора число независимых собственных векторов равно числу различных собственных значений, и минимальный многочлен матрицы совпадает с характеристическим.

9. Докажите, что

$$\left(P\exp\int_0^t A(\tau)d\tau\right)^{-1}=E+\sum_{n>0}(-1)^n\int\cdots\int_{0\le\tau_1\le\tau_2\le\cdots\le\tau_n\le t}A(\tau_1)A(\tau_2)\cdots A(\tau_n)d\tau_1\cdots d\tau_n$$