СИНОПСИС

По математическому анализу написано много хороших учебников на любой вкус. Поэтому здесь я позволю себе ограничиться лишь кратким перечислением основных определений и фактов, прозвучавших на лекциях. Если остаются вопросы — спрашивайте, обращайтесь к литературе, а лучше всего попробуйте придумать недостающее рассуждение сами. Исправления и дополнения приветствуются. Удачи!

Документ находится по адресу **http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/calculus-1/synopsis.pdf** и периодически обновляется.

Дедекиндовы сечения

Это — самый элементарный (но, на мой взгляд, не самый простой в приложениях) способ построить вещественные числа $\mathbb{R}$ из рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Определение 1. *Дедекиндово сечение* — подмножество $a \subset \mathbb{Q}$, такое что

1) Если $x \in a$, то $\forall y > x$ имеем $y \in a$;

2) $\forall x \in a\ \exists y \in a,\ y < x$;

3) $a \neq \emptyset$, $a \neq \mathbb{Q}$.

Часто в литературе сечение задаётся парой множеств $(\mathbb{Q} \setminus a, a)$, что отчасти объясняет название, или множеством $\mathbb{Q} \setminus a$ с противоположными знаками неравенств в определении. Мой выбор знаков неравенств обусловлен простотой записи произведения сечений.

Пример. Для всякого $x \in \mathbb{Q}$ строим сечение $\{y \in \mathbb{Q} | y > x\}$. Оно будет соответствовать рациональному числу x, в частности у нас имеется ноль и единица.

Определение 2. Будем говорить, что $a \geqslant b$, если имеет место $a \subset b$.

Предложение 1 *Пусть множество a удовлетворяет свойствам 1) и 3), но не 2), то есть найдётся $x \in a$, такой что $\forall y \in a\ y \geqslant x$. Тогда множество $a' = a \setminus \{x\}$ — дедекиндово сечение.*

Определение 3. Арифметические операции:

$$a + b = \{x + y | x \in a,\, y \in b\}, \qquad -a = (\mathbb{Q} \setminus \{-x | x \in a\})'$$

Для $a > 0, b > 0$ определим

$$a \cdot b = \{x \cdot y | x \in a,\, y \in b\}, \qquad 1/a = (\mathbb{Q}_+ \setminus \{1/x | x \in a\})',\ \text{где}\ \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\},$$

для произвольных знаков положим $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, $1/(-a) = -(1/a)$.

Теорема 1 *Множество дедекиндовых сечений с такими операциями образует упорядоченное поле. Оно называется* полем вещественных (действительных) чисел *и обозначается* $\mathbb{R}$.

Определение 4. Определим точную верхнюю/нижнюю грань подмножества $\mathbb{R}$. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, положим

$$\sup M = \left(\bigcap_{a \in M} a\right)' \subset \mathbb{Q}, \qquad \inf M = \left(\bigcup_{a \in M} a\right)' \subset \mathbb{Q}$$

(на самом деле штрих во втором определении не обязателен).

Легко проверить, что эти множества удовлетворяют пунктам 1) и 2) определения дедекиндовых сечений, но не пункту 3). Известно лишь, что $\sup M \neq \mathbb{Q}$, $\inf M \neq \emptyset$.

Предложение 2 *Имеем $\sup M \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда найдётся $c \in \mathbb{R}$, такое что для всякого $a \in M$ выполнено $a \leqslant c$. Такие множества называются* ограниченными сверху, *а число c называется* верхней гранью *множества M*

Имеем $\inf M \neq \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда найдётся $c \in \mathbb{R}$, такое что для всякого $a \in M$ выполнено $a \geqslant c$. Такие множества называются ограниченными снизу, *а число c называется* нижней гранью *множества M.*

Предложение 3 *Точная верхняя грань является наименьшей из всех верхних граней, точная нижняя грань является наибольшей из всех нижних граней.*

Комплексные числа

Определение 5. *Комплексные числа* — выражения вида $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, со сложением и умножением, определённым как

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \qquad (a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Предложение 4 *Комплексные числа образую поле.*

Для обратного элемента множно написать явную формулу. Определим *модуль* комплексного числа $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ и *сопряжение* $\overline{a+bi}=a-bi$. Тогда $z^{-1}=\overline{z}/|z|^2$.

Комплексные числа можно задавать и в полярных координатах, радиус при этом равен $|z|$, а угол с осью абсцисс называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\arg(z)$. Если $\arg(z)=\phi$, то $z=|z|\cos(\phi)+|z|\sin(\phi)i$.

Теорема 2 *Имеем* $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$.

Следствие 1 *Для произвольных* ϕ *и* ψ *имеем*

$$\cos(\phi+\psi)=\cos(\phi)\cos(\psi)-\sin(\phi)\sin(\psi), \qquad \sin(\phi+\psi)=\cos(\phi)\sin(\psi)+\sin(\phi)\cos(\psi).$$

Предел последовательности

Определение 6. *Последовательность* элементов множества M — отображение из $\mathbb{N}$ в M.
Определение 7. Пусть $M=\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Будем говорить, что последовательность a_i *сходится* к $A\in M$, если

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\, \varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n\in\mathbb{N},\, n>N\ \ |a_n-A|<\varepsilon.$$

Число A в этом случае будем называть *пределом* последовательности a_i и обозначать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Предложение 5 *У последовательности может быть не более одного предела.*

Предложение 6 *Число A является пределом последовательности a_i тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\, \varepsilon>0$ множество $\{n\in\mathbb{N}|\ |a_n-A|\geqslant\varepsilon\}$ конечно. В частности, перестановка членов последовательности не меняет её предела.*

Лемма 1 *Пусть последовательность a_i сходится. Тогда множество $\{|a_n|\ |n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ ограничено сверху.*

Теорема 3 *Пусть последовательности a_i и b_i сходятся к A и B соответственно. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B, \quad \lim_{n\to\infty}(-a_n)=-A, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B.$$

Кроме того, если $A\neq 0$ и $a_n\neq 0$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то

$$\lim_{n\to\infty} 1/a_n=1/A.$$

Определение 8. Последовательность a_n называется *возрастающей*, если для всех n выполнено $a_{n+1}\geqslant a_n$, и *убывающей*, если $a_{n+1}\leqslant a_n$. Последовательность называется *монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

Теорема 4 *Всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.*

Следствие 2 *Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Определение 9. Будем говорить, что A — *предельная точка* последовательности a_n, если

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\, \varepsilon>0\quad \forall N\in\mathbb{N}\quad \exists n>N\quad |a_n-A|<\varepsilon.$$

Предложение 7 *Число A является предельной точкой последовательности тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{n \in \mathbb{N} | \, |a_n - A| < \varepsilon\}$ бесконечно.*

Теорема 5 *Всякая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет предельную точку.*

Определение 10. Будем называть последовательность *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Легко доказать, что такая последовательность ограничена. А её предельная точка оказывается пределом.

Теорема 6 (Критерий Коши) *Последовательность вещественных/комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел: $a_n \sim b_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Предложение 8 *Почленное сложение, вычитание и умножение корректно определены на классах эквивалентности таких последовательностей.*

Взятие предела последовательности приводит к следующему альтернативному определению $\mathbb{R}$.

Теорема 7 *Множество классов фундаментальных последовательностей рациональных чисел с определёнными выше операциями изоморфно $\mathbb{R}$.*

Сравнивать классы последовательностей можно так: $a_n \geqslant 0$ если a_n эквивалентна последовательности модулей $|a_n|$.

Аксиоматический подход.

Вещественные числа можно определить и аксиоматически.

Определение 11. Множество вещественных чисел — поле с *отношением порядка* $\geqslant$, обладающим следующими свойствами:

1) если $a \geqslant b$, $b \geqslant a$, то $a = b$;
2) если $a \geqslant b$, $b \geqslant c$, то $a \geqslant c$;
3) для всяких a и b выполнено $a \geqslant b$ или $b \geqslant a$;
4) если $a \geqslant b$, то для всякого c выполнено $a + c \geqslant b + c$;
5) если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $ab \geqslant 0$;
6) у всякого ограниченного сверху непустого подмножества существует точная верхняя грань (наименьшая из верхних граней).

Извлекая следствия, отождествим такой объект с дедекиндовыми сечениями. Будем писать $a > b$, если $a \geqslant b$ и $a \neq b$.

Лемма 2 *Из аксиом следует, что*

(i) *если $a \geqslant b$, то $-b \geqslant -a$;*

(ii) *у всякого ограниченного снизу непустого подмножества существует точная нижняя грань;*

(iii) $1 > 0$.

Лемма 3 *Вещественные числа содержат рациональные числа $\mathbb{Q}$ в качестве упорядоченного подполя.*

Теорема 8 (принцип Архимеда) *Подмножество натуральных чисел $\mathbb{N}$ неограничено.*

Следствие 3 (плотность $\mathbb{Q}$) *Пусть $x > y$. Тогда найдётся $q \in \mathbb{Q}$, такое что $x > q > y$.*

Теорема 9 *Сопоставим каждому дедекиндовому сечению $D \subset \mathbb{Q}$ вещественное число* $\inf D$*. И наоборот, каждому вещественному x сопоставим множество $\{q \in \mathbb{Q} | q > x\}$. Тогда эти отображения обратны друг другу, в частности, вещественные числа однозначно задаются дедекиндовыми сечениями.*

Осталось отождествить арифметические операции. Это возможно по следующей теореме.

Теорема 10 *(i) Пусть M и N — непустые ограниченные снизу подмножества вещественных чисел. Рассмотрим подмножество $M+N=\{x+y|x\in M,\,y\in N\}$. Тогда оно ограничено снизу и $\inf(M+N)=\inf M+\inf N$.*

(ii) Пусть M и N — непустые подмножества положительных вещественных чисел (оно автоматически ограничены снизу нулём). Рассмотрим подмножество $M\cdot N=\{x\cdot y|x\in M,\,y\in N\}$. Тогда $\inf(M\cdot N)=\inf M\cdot\inf N$.

Сопоставление числу x подмножества $\{q\in\mathbb{Q}|q>x\}$ работает и в более общей ситуации.

Теорема 11 *Всякое упорядоченное поле, в котором выполнены аксиомы 1-5 и принцип Архимеда, может быть вложено в упорядоченное поле $\mathbb{R}$.*

Это позволяет использовать другие варианты аксиомы полноты.

Следствие 4 *Всякое упорядоченное поле, в котором выполнены аксиомы 1-5, и всякая монотонная ограниченная последовательность сходится, изоморфно упорядоченному полю $\mathbb{R}$.*

Ряды

Определение 12. *Рядом* называется последовательность чисел $S_n=a_1+\dots+a_n$, *суммой ряда* — предел этой последовательности. Числа S_n называются *частичными суммами* последовательности S_n.
Определение 13. Ряд $a_1+a_2\dots$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $|a_1|+|a_2|+\dots$ сходится. Сходящийся ряд, не обладающий этим свойством, называется *условно сходящимся.*
Определение 14. Будем называть *перестановкой слагаемых* произвольное взаимно-однозначное отображение $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Она действует на множестве рядов, изготавливая из ряда $a_1+a_2+a_3+\dots$ ряд $a_{\sigma(1)}+a_{\sigma(2)}+a_{\sigma(3)}+\dots$.

Теорема 12 *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. Более того, всякий ряд, полученный из него перестановкой слагаемых, сходится к тому же числу.*

Теорема 13 (Риман) *Пусть $a_1+a_2+\dots$ — условно сходящийся ряд вещественных чисел. Тогда для каждого $x\in\mathbb{R}$ существует перестановка слагаемых, такая что полученный ряд сходится к x. Кроме того, существует перестановка, такая что полученный ряд расходится.*

Непрерывные функции.

Определение 15. *Функцией вещественной переменной (действительного переменного)* будем называть отображение из $D\subset\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$; *функцией комплексной переменной (комплексного переменного)* будем называть отображение из $D\subset\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Подмножество D называется *областью определения* этой функции.

Если не оговаривается иное, все определения и утверждения про функции формулируются и для вещественной, и для комплексной переменной.
Определение 16. **(определение по Гейне)** Функция f называется *непрерывной* в точке $x\in D$, если для любой последовательности $a_n\in D$, сходящейся к x, последовательность $f(a_n)$ сходится к $f(x)$.
Определение 17. **(определение по Коши)** Функция f называется *непрерывной* в точке $x\in D$, если

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}:\varepsilon>0\;\;\exists\delta\in\mathbb{R}:\delta>0\;\;\forall y:|x-y|<\delta\quad|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Предложение 9 *Определения по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Следующие два утверждения легко следует из определения по Гейне.

Предложение 10 *Пусть функции f и g непрерывны в точке x. Тогда $f\pm g$, fg — непрерывны в x, а если $g(x)\neq 0$, то f/g — непрерывна в x.*

Предложение 11 *Если функция f непрерывна в x, g непрерывна в $f(x)$, то их композиция $g\circ f$ непрерывна в x.*

Определение 18. Будем говорить, что функция непрерывна на множестве X, если она непрерывна во всех его точках. Будем говорить, что фунция непрерывна, если она непрерывна на всей области определения.

Теорема 14 *Пусть функция вещественной переменной непрерывна на отрезке* $[a, b]$. *Тогда она принимает все значения между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

Определение 19. Функция f вещественной переменной называется возрастающей (соотв. убывающей), если для всех $x, y \in D$, таких что $x > y$, выполнено $f(x) \geqslant f(y)$ (соотв. $f(x) \leqslant f(y)$).

Функция f вещественной переменной называется строго возрастающей (соотв. строго убывающей), если для всех $x, y \in D$, таких что $x > y$, выполнено $f(x) > f(y)$ (соотв. $f(x) < f(y)$).

Функция вещественной переменной называется (строго) монотонной, если она (строго) возрастающая или (строго) убывающая.

Лемма 4 *Монотонная на отрезке функция непрерывна на нём тогда и только тогда, когда она принимает все промежуточные значения.*

Теорема 15 *Пусть функция* f *строго монотонна и непрерывна на отрезке* $[a, b]$. *Тогда существует и единственна* обратная функция $g : f([a, b]) \to \mathbb{R}$, *такая что* $g(f(x)) = x$, $f(g(x)) = x$. *При этом* g *непрерывна.*

Следствие 5 *Аналогичное утверждение верно и для функции на лучах* $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$, *а также на всём* $\mathbb{R}$.

Определение 20. Будем говорить, что функция f имеет предел в точке a равный A (обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$), если следующая функция на $D \cup a$ непрерывна в x:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ A & x = a \end{cases}$$

Предложение 12 *Пусть* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, *тогда*

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \qquad \lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = AB,$$

а если $B \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x \to a} (f(x)/g(x)) = A/B$.

Определение 21. Определим *правый и левый пределы* функции вещественной переменной $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ как предел $f(x)$ в точке a при ограничении области определения на $D \cap \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ и $D \cap \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$.

Определение 22. Определим *бесконечные пределы* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(1/y)$, а также для функции вещественной переменной положим $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0+0} f(1/y)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0-0} f(1/y)$.

Определение 23. Пусть $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для вещественного $\varepsilon > 0$ назовём *ε-окрестностью* $U_\varepsilon(x)$ точки $x \in K$ множество $\{y \in K | \, |y - x| < \varepsilon\}$.

Определение 24. Точка x называется *предельной точкой* множества X, если для всякого вещественного $\varepsilon > 0$ пересечение $U_\varepsilon(x)$ с X бесконечно.

Предложение 13 *Точка* x *является предельной точкой множества* X *тогда и только тогда, когда для всякого вещественного* $\varepsilon > 0$ *пересечение* $U_\varepsilon(x)$ *с* X *содержит отличную от* x *точку.*

Предложение 14 *Пусть* a *— предельная точка множества* D. *Тогда предел определённой на* D *функции в точке* a *единственен.*

Определение 25. Подмножество $X \subset D$ называется *замкнутым* в D, если X содержит всякую свою предельную точку, принадлежащую D.

Определение 26. Подмножество $X \subset D$ называется *открытым* в D, если для всякого $x \in X$ найдётся $\varepsilon > 0$, такое что $U_\varepsilon(x) \cap D \subset X$.

Предложение 15 *Подмножество* $X \subset D$ *замкнуто тогда и только тогда, когда* $D \setminus X$ *открыто.*

Определения непрерывности по Гейне и Коши могут быть переформулированы следующим образом.

Предложение 16 *(i) Функция f с областью определения D непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут в D.*

(ii) Функция f с областью определения D непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт в D.

Можно модифицировать определение открытых и замкнутых множеств, чтобы аналогичным образом сформулировать непрерывность функции на подмножестве $Y \subset D$: подмножество D открыто, если вместе с каждой точкой $x \in Y$ в нём содержится $U_\varepsilon(x) \cap D$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и замкнуто, если оно содержит все предельные точки, принадлежащие Y.

Определение 27. Множество X называется *компактным* (по Гейне), если всякая последовательность элементов X имеет предельную точку из X.
Определение 28. Множество X называется *компактным* (по Коши), если для всякого покрытия X открытыми множествами существует конечное подпокрытие.

Теорема 16 *Для подмножеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ определения компактности эквивалентны, при этом множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Теорема 17 *(i) Непрерывная функция на компактном множестве ограничена.*

(ii) Пусть f — функция вещественной переменной, определённая на компакте. Тогда она принимает в некоторой точке своё максимальное значение $\sup f(x)$, а также минимальное значение $\inf f(x)$.

Определение 29. Функция называется *равномерно непрерывной* на множестве D, если

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \in \mathbb{R} : \delta > 0 \;\; \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Теорема 18 *Всякая непрерывная функция на компактном множестве равномерно непрерывна на нём.*

Теорема была доказана на лекции для функций вещественной переменной.

Производная.

Определение 30. Будем говорить, что функция f *дифференцируема* в точке x, если существует предел $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Значение этого предела называется *производной* f в точке x и обозначается $f'(x)$.

Предложение 17 *Дифференцируемая в x функция непрерывна в x.*

Предложение 18 *На всей области определения выполнено $const' = 0$, $x' = 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(e^x)' = e^x$.*

Предложение 19 *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x. Тогда $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.*

Предложение 20 *Пусть функция g дифференцируема в точке x, пусть функция f дифференцируема в точке $g(x)$. Тогда $f(g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$.*

Предложение 21 *Пусть функция g — обратная к функции f. Предположим, f дифференцируема в точке x, и $f'(x) \neq 0$. Тогда g дифференцируема в точке $f(x)$ и $g'(f(x)) = 1/f'(x)$.*

Определение 31. Точка x называется *локальным максимумом (соотв. локальным минимумом)* функции вещественной переменной f, если найдётся $\delta > 0$, такое что для всех $x - \delta < y < x + \delta$ выполнено $f(x) \geqslant f(y)$ (соотв. $f(x) \leqslant f(y)$).

Точка называется *локальным экстремумом*, если она является локальным максимумом или локальным минимумом.

Предложение 22 *Если точка x является локальным экстремумом, и f дифференцируема в x, то $f'(x) = 0$.*

Теорема 19 (Ролль) *Пусть функция вещественной переменной f дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причём $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$.*

Теорема 20 (Лагранж) *Пусть функция вещественной переменной f дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда найдётся точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Теорема 21 (Коши) *Пусть функции вещественной переменной f и g дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, причём $g(a) \neq g(b)$, а f' и g' не обращаются в ноль одновременно на (a, b). Тогда найдётся точка $c \in (a, b)$, такая что $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

Теорема 22 *Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда f возрастает (соотв. убывает) на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ (соотв. $f'(x) \leqslant 0$) на $[a, b]$.*

Кроме того, если $f'(x) > 0$ (соотв. $f'(x) < 0$) на (a, b), то f строго возрастает (соотв. строго убывает).

Определение 32. Функция вещественной переменной называется *выпуклой вверх (соотв. выпуклой вниз)* на отрезке $[a, b]$, если для всех $a < x < y < b$ и α, $\beta > 0$, таких что $\alpha + \beta = 1$, выполнено $f(\alpha x + \beta y) \geqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$ (соотв. $f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$).

Функция называется *строго выпуклой вверх (соотв. вниз)*, если соотвествующие неравенства строгие при $y > x$, α, $\beta > 0$.

Теорема 23 *Пусть функция вещественной переменной f дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда f выпукла вверх (соотв. вниз) на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f'(x)$ убывает (соотв. возрастает) на $[a, b]$.*

Кроме того, если f' строго убывает (соотв. строго возрастает) на (a, b), то f строго выпукла вверх (соотв. вниз).

Определение 33. Будем говорить, что x — *точка перегиба* функции вещественной переменной f, если найдется $\delta > 0$, такой что на $[x - \delta, x]$ f выпукла в одну сторону, а на $[x, x + \delta]$ — в другую.

Следствие 6 *Пусть функция f дважды дифференцируема на $[a, b]$. Тогда во всякой точке перегиба выполнено $f''(x) = 0$; функция f выпукла вверх на отрезках, где $f'' \leqslant 0$, и вниз на отрезках, где $f'' \geqslant 0$.*

Определение 34. Будем говорить, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Теорема 24 (Правило Лопиталя) *Пусть функции вещественной переменной $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой (не включающей a) окрестности точки a, пусть $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Предположим, что или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.*

Тогда если существует предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Аналитические функции.

Определение 35. Назовём ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *степенным рядом.*

Теорема 25 *Пусть степенной ряд сходится не для всех x. Тогда существует такое вещественное число $R \geqslant 0$, что ряд сходится абсолютно при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$. Число R называется* радиусом сходимости.

Теорема 26 *Функция, заданная степенным рядом, дифференцируема при $|x| < R$, при этом её производная равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + 1) a_{n+1} x^n$.*

Определение 36. Функция называется *аналитической* в области D, если для каждой точки $x_0 \in D$ существует степенной ряд и окрестность, в которой значение функции в x совпадает со значениями этого степенного ряда в $x - x_0$.

Следствие 7 *Аналитические функции — гладкие (бесконечное число раз дифференцируемые).*

Теорема 27 *Сумма, произведение и композиция аналитических функций — аналитическая функция.*

Пусть функция f гладкая. Сравнивая производные в точке x_0, видим, что если f является аналитической в x_0, то она совпадает в некоторой окрестности x_0 со значениями её *ряда Тейлора*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Теорема 28 *Пусть функция вещественной переменной f дифференцируема $n+1$ раз на промежутке между x_0 и x. Пусть вспомогательная функция ψ дифференцируема на этом же промежутке. Тогда найдётся c на этом промежутке, такой что*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Взяв $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$, получим следующее утверждение.

Следствие 8 (форма Лагранжа остаточного члена) *Пусть функция вещественной переменной f дифференцируема $n+1$ раз на промежутке между x_0 и x. Тогда найдётся c на этом промежутке, такой что*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Взяв $\psi(t) = (x-t)$, получим следующее утверждение.

Следствие 9 (форма Коши остаточного члена) *Пусть функция вещественной переменной f дифференцируема $n+1$ раз на промежутке между x_0 и x. Тогда найдётся c на этом промежутке, такой что*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = (x-x_0)\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Определение 37. Для функции f и точки x определим множества функций

$$\begin{aligned} O_x(f) &= \{g \mid \exists C \in \mathbb{R},\ C>0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta>0\ \forall y : |y-x|<\delta \quad |g(y)| < C|f(y)|\}; \\ o_x(f) &= \{g \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon>0\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta>0\ \forall y : |y-x|<\delta \quad |g(y)| < \varepsilon|f(y)|\}. \end{aligned}$$

Предложение 23 *Множества $O_x(f)$ и $o_x(f)$ являются векторными пространствами. При этом выполняется $o_x(f) \subset O_x(f)$, $O_x(f)\cdot O_x(g) \subset O_x(fg)$, $O_x(f)\cdot o_x(g) \subset o_x(fg)$.*

Предложение 24 *Производная функции f в точке x_0 равна A тогда и только тогда, когда*

$$f(x) - f(x_0) - A(x-x_0) \in o_{x_0}(x-x_0)$$

как функция от переменной y.

Следствие 10 *Пусть f — функция вещественной переменной, такая что $f^{(n+1)}$ определена и непрерывна в некоторой окрестности x_0. Тогда для следующей функции от переменной x выполнено*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \in O_{x_0}\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Теорема 29 (форма Пеано остаточного члена) *Пусть f — функция вещественной переменной, такая что $f^{(n)}$ определена в точке x_0. Тогда для следующей функции от переменной x выполнено*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \in o_{x_0}\left((x-x_0)^{n}\right).$$

Функции многих переменных.

Определение 38. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Определим *норму* на вектроном пространстве V над K как отображение $|\ |: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:
1) $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0$ равносильно $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ для $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in V$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Определение 39. Две нормы $|x|$ и $|x|'$ называются *эквивалентными*, если найдутся такие $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 > 0$, что для всякого x выполнено $C_1|x| \leqslant |x|' \leqslant C_2|x|$.

Пример. Самый известный пример для конечномерного $V = \mathbb{K}^n$ — евклидова норма $|(x_1, \ldots, x_n)|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$. Самый удобный для вычислений $|(x_1, \ldots, x_n)|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Эти две нормы эквивалентны: $|x|_\infty \leqslant |x|_2 \leqslant \sqrt{n}|x|_\infty$. Более общим примером нормы является $|(x_1, \ldots, x_n)|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$ для $p \geqslant 1$.

Предложение 25 *Норма на $\mathbb{C}^n$ является нормой на соответствующим вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.*

Определение 40. Будем говорить, что последовательность элементов $a_n \in V$ сходится к $A \in V$ (записывая $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и называя A пределом), если

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\, n > N\ \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Предложение 26 *У каждой последовательности существует не более одного предела. Предел линейной комбинации двух сходящихся последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ равен $\lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Предложение 27 *Последовательность, сходящаяся относительно одной нормы, сходится к тому же элементу для любой эквивалентной нормы. Последовательность элементов $\mathbb{K}^n$ с нормой $|x|_\infty$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности, составленные из k-тых координат для $k = 1 \ldots n$.*

Следствие 11 *В $\mathbb{K}^n$ с нормой, эквивалентной $|x|_\infty$, выполнен Критерий Коши: последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n,\, m \in \mathbb{N},\, n,\, m > N\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Определение 41. Элемент A называется предельной точкой последовательности a_n (соотв. множества $M \subset \mathbb{K}^n$), если $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ найдётся бесконечное множество n, таких что $|a_n - A| < \varepsilon$ (соотв. бесконечное множество $x \in M$, таких что $|x - A| < \varepsilon$).

Определение 42. Отображение подмножества $D \subset \mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}$ называется *функцией n переменных*, отображение $D \subset \mathbb{K}^n$ в $\mathbb{K}^m$ называется *векторнозначной функцией n переменных*.

Определение 43. **(определение по Гейне)** Функция f называется *непрерывной* в точке $x \in D$, если для любой последовательности $a_n \in D$, сходящейся к x, последовательность $f(a_n)$ сходится к $f(x)$.

Определение 44. **(определение по Коши)** Функция f называется *непрерывной* в точке $x \in D$, если

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}:\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta \in \mathbb{R}:\, \delta > 0\ \ \forall\, y:\, |x - y| < \delta\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Предложение 28 *Определения по Гейне и Коши эквивалентны.*

Предложение 29 *Линейные комбинации и прозиведение непрерывных функций непрерывны. Линейные комбинации и композиции непрерывных векторнозначных функций непрерывны.*

Предложение 30 *Векторназначная функция $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ задаётся набором m координатных функций $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. При этом если норма на $\mathbb{K}^m$ эквивалентна $|x|_\infty$, то векторнозначная функция непрервына тогда и только тогда, когда все её координатные функции непрерывны.*

Определение 45. Для $D \subset \mathbb{K}^n$ будем говорить, что функция $f: D \to \mathbb{K}^m$ имеет предел в точке $a \in \mathbb{K}^n$ равный $A \in \mathbb{K}^m$ (обозначение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$), если следующая функция на $D \cup a$ непрерывна в x:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ A & x = a \end{cases}$$

Предложение 31 *Пусть у функций $f(x) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ и $g(x) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ существуют пределы при $x \to a$, тогда выполнено $\lim_{x\to a}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x)$. Если существуют пределы у $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ и $g(x) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, то $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$.*

Предложение 32 *Пусть $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ и $g : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ — функции, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Тогда предел $g(f(x))$ при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*
1) $g(y)$ непрерывна в точке b;
2) существует такое вещественное $\delta > 0$, что при $|x - a| < \delta$ выполнено $f(x) \neq b$;
3) существует такое вещественное $\delta > 0$, что при $|x - a| < \delta$ выполнено $f(x) = b$.
При этом в первых двух случаях $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, а в третьем он равен $g(b)$.

Топология $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем норму в $\mathbb{R}^n$. Для $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ обозначим $U_\varepsilon(x) = \{y|\ |y - x| < \varepsilon\}$.
Определение 46. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для каждого элемента $x \in X$ найдётся $\varepsilon > 0$, такой что $U_\varepsilon(x) \subset X$. Множество $X \subset D \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым подмножеством* D, если для каждого элемента $x \in X$ найдётся $\varepsilon > 0$, такой что $U_\varepsilon(x) \cap D \subset X$.
Определение 47. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество $X \subset D \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым подмножеством* D, если оно содержит все свои предельные точки, принадлежащие D.

Предложение 33 *Для эквивалентных норм одни и те же множества будут открытыми/замкнутыми множествами и подмножествами.*

Предложение 34 *Множество X замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathbb{R}^n \setminus X$ открыто. Множество $X \subset D$ — замкнутое подмножество D тогда и только тогда, когда $D \setminus X$ — открытое подмножество D.*

Предложение 35 *Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого подмножества $\mathbb{R}^m$ открыт в $\mathbb{R}^n$. Для $D \subset \mathbb{R}^n$ функция $f : D \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на всём D тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого подмножества $\mathbb{R}^m$ — открытое подмножество D.*

Определение 48. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если его невозможно представить как $U_1 \cup U_2$, где U_1, $U_2 \subset X$ — непересекающиеся непустые открытые подмножества X.

Предложение 36 *Отрезки, полуинтервалы, интервалы, лучи в $\mathbb{R}$ и всё $\mathbb{R}$ связны.*

Предложение 37 *Образ связного множества при непрерывном отображении связен.*

Следствие 12 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — связное множество. Тогда всякая непрерывная функция $D \to \mathbb{R}$ принимает все промежуточные значения.*

Определение 49. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченым*, если найдётся $C \in \mathbb{R}$, такое что $|x| < C$ для $x \in X$.

Определение 50. Множество X называется *компактным* (по Гейне), если всякая последовательность элементов X имеет предельную точку из X.
Определение 51. Множество X называется *компактным* (по Коши), если для всякого покрытия X открытыми множествами существует конечное подпокрытие.

Теорема 30 *Для подмножеств $\mathbb{R}^n$ с нормой, эквивалентной $|x|_\infty$, определения компактности эквивалентны, при этом множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Предложение 38 *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.*

Следствие 13 *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. Тогда f ограничена, и найдутся x_-, $x_+ \in D$, такие что для всякого $x \in D$ выполнено $f(x_-) \leqslant f(x) \leqslant f(x_+)$.*

Лемма 5 *Всякая норма на $\mathbb{R}^n$ как отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна относительно $|x|_\infty$.*

Теорема 31 *Любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.*

Дифференциал.

Определение 52. Для функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ и точки $x \in \mathbb{K}^n$ определим множества функций $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$$\begin{aligned} O_x(f) &= \{g \mid \exists C \in \mathbb{R},\, C > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall y : |y - x| < \delta \quad |g(y)| < C|f(y)|\}; \\ o_x(f) &= \{g \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall y : |y - x| < \delta \quad |g(y)| < \varepsilon|f(y)|\}. \end{aligned}$$

Определение 53. Функция $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ называется *дифференцируемой* в точке $x \in \mathbb{K}^n$, если существует линейное отображение $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, для которого $F(y) - F(x) - A(y - x) \in o_x(|y - x|)$.

Предложение 39 *Линейное отображение A в определении дифференцируемости единственно. Оно называется* дифференциалом *F в точке x и обозначается d_xF.*

Предложение 40 *Функция F дифференцируема в точке x с дифференциалом d_xF тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - d_xF(y - x)}{|y - x|} = 0,$$

в частности, для функций $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Определение 53 равносильно Определению 30.

Предложение 41 *Всякая дифференцируемая в x функция непрерывна в x.*

Предложение 42 *Для λ, $\mu \in \mathbb{K}$ и функций $F, G : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, дифференцируемых в точке x, функция $\lambda F + \mu G$ дифференцируема в точке x, и $d_x(\lambda F + \mu G) = \lambda \cdot d_xF + \mu \cdot d_xG$.*

Предложение 43 *Пусть функции $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ и $G : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ дифференцируемы в точке x. Тогда функция fG дифференцируема в точке x и $d_x(fG) = (d_xf) \cdot G(x) + f(x) \cdot d_xG$ (в правой части скаляры умножается на операторы).*

Предложение 44 *Пусть $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ дифференцируема в точке x, $G : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ дифференцируема в точке $F(x)$. Тогда их композиция $G \circ F$ дифференцируема в точке x, и $d_x(G \circ F) = d_{F(x)}G \circ d_xF$.*

Определение 54. Для функции $F(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ определим её *частные производные* $\frac{\partial F}{\partial x_i} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ как пределы

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_n)}{t}.$$

Другими словами, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ — производная функции F как функции от x_i при фиксированных значениях остальных переменных.

Предложение 45 *Пусть $F = (F_1, \ldots, F_m) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ дифференцируема в точке x. Тогда её дифференциал d_xF записывается в стандартных базисах* матрицей Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

Теорема 32 *Пусть $F = (F_1, \ldots, F_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — функция, у которой частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ определены и непрерывны в некоторой окрестности x. Тогда F дифференцируема в точке x.*

Предложение 46 *Пусть x — локальный экстремум функции $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, при этом F дифференцируема в x. Тогда $d_xF = 0$.*

Рассмотрим функцию $F(x, y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Обозначим $F_x(x, y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $F_y(x, y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ её дифференциал по переменным x и y соответственно (то есть ограничение $d_{(x,y)}F$ на соответствующее подпространство). Посмотрим, при каких условиях система уравнений $F(x, y) = 0$ задаёт *неявную функцию* $y(x)$, то есть однозначно выражает y через x.

Теорема 33 *Пусть $F(x_0, y_0) = 0$ и $F_y(x_0, y_0)$ — невырожденное линейное отображение. Предположим, что частные производные F непрерывны в окрестности (x_0, y_0). Тогда*

(i) найдётся открытая окрестность $U = U_x \times U_y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ точки (x_0, y_0) и функция $f : U_x \to U_y$, такая что для $x \in U_x$, $y \in U_y$ равнство $F(x, y) = 0$ равносильно $y = f(x)$;

(ii) при этом функция f дифференцируема, и её дифференциал в точке x равен $-F_y(x, y)^{-1}F_x(x, y)$, где $y = f(x)$.

Доказательство устроено так. Для (i) достаточно найти окрестности U_x и U_y, чтобы система уравнений $F(x,y)=0$ от переменных y имела бы ровно одно решение в U_y при любом $x \in U_x$. Введём обозначение $F_y^i(x,y) = (\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(x,y), \ldots, \frac{\partial F_i}{\partial y_n}(x,y))$ для строки матрицы $F_y(x,y)$.

Лемма 6 *Найдётся открытая окрестность $V_x \times V_y$ точки (x_0,y_0), для точек (a_i,b_i) которой матрица, составленная из строк $F_y^1(a_1,b_1), \ldots, F_y^n(a_n,b_n)$, невырождена.*

Лемма 7 *Пусть $F(x,y)=F(x,y')$. Тогда для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ найдётся такое $b_i \in \mathbb{R}^n$ на отрезке между y и y', что $F_y^i(x,b_i)(y-y')=0$ (в левой части — произведение строки на столбец).*

Этим доказывается единственность требуемого решения в $V_x \times V_y$. Выберем норму на $\mathbb{R}^{m+n}$ (удобнее всего — максимум норм координат) и $\mathbb{R}^n$ (евклидову норму для дифференцируемости вне начала координат). Рассмотрим множества $B(x,r) = \{(x,y) | \, |y-y_0| \leqslant r\}$ и $S(x,r) = \{(x,y) | \, |y-y_0| = r\}$. Выберем r, чтобы шары $B(x,r)$ целиком лежали в $\{x\} \times V_y$. Пусть $\mu > 0$ — минимум $|F(x,y)|$ на $S(x_0,r)$.

Лемма 8 *Существует открытая окрестность $U_x \subset V_x$, содержащая x_0, такая что для $x \in U_x$ выполнено $|F(x,y_0)| < \mu/2$, а для всех $y \in S(x,r)$ выполнено $|F(x,y)| > \mu/2$.*

В качестве U_y возьмём $\{y | \, |y-y_0| < r\}$. Рассмотрим минимум $|F(x,y)|$ на $B(x,r)$. По Лемме 8 он достигается не на границе. Если он не равен нулю, то функция $|F(x,y)|$ дифференцируема в этой точке, и её дифференциал равен нулю, что противоречит Лемме 6. Таким образом, в каждом шаре $B(x,r)$ при $x \in U_x$ найдётся требуемое решение.

Утверждение о дифференцируемости и производных неявной функции выводится предельным переходом из следующей леммы.

Лемма 9 *Пусть $F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Тогда найдутся такие (a_i,b_i) на отрезке между (x,y) и $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, что $F_x^i(a_i,b_i)\Delta x + F_y^i(a_i,b_i)\Delta y = 0$.*

Следствие 14 *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — функция с непрерывными частными производными в окрестности x_0, причём $d_{x_0}F$ невырожден. Тогда найдётся открытая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащая x_0, и функция $G : F(U) \to U$, обратная к F. При этом функция G дифференцируема, и $d_{F(x)}G = (d_xF)^{-1}$.*

Предложение 47 *Пусть функция $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет непрерывные вторые частные производные. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}F = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}F.$$

Выражения в этом равенстве обычно записывают как $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}$.

Определение 55. Для функции $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определим *высший дифференциал* $d_x^{(k)}F : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^m$ индуктивно: $d_x^{(1)}F = d_xF$, а $d_x^{(k+1)}F$ — дифференциал $d_x^{(k)}F$ по переменной x.

Предложение 48 *Функция $d_x^{(k)}F$ линейна по каждому из k аргументов, не меняется при перестановке аргументов, и значение на базисных векторах $d_x^{(k)}F(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ равно $\frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \ldots x_{i_k}}$.*

Для функции $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, у которой существует $d_0^{(k)}F$, определим многочлен

$$P_F^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1+\cdots+k_n \leqslant k} \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Первые k дифференциалов $P_F^{(k)}$ совпадают с соответствующими дифференциалами F.

Теорема 34 *(i) Имеем $F(x) - P_F^{(k)}(x) \in o_0(|x|^k)$.*

(ii) Пусть $d_x^{(k+1)}F$ определён и непрерывен в некоторой окрестности начала координат. Тогда для каждого x в этой окрестности найдётся $t \in (0,1)$, для которого

$$F(x) - P_F^{(k)}(x) = \frac{d_{tx}^{(k+1)}F(x, \ldots, x)}{(n+1)!}.$$

(iii) Пусть $d_x^{(k+1)}F$ определён и непрерывен в некоторой окрестности начала координат. Тогда для каждого x в этой окрестности найдётся $t \in (0,1)$, для которого

$$F(x) - P_F^{(k)}(x) = \frac{(1-t)^k d_{tx}^{(k+1)}F(x, \ldots, x)}{n!}.$$