Плоские задачи

Задача 1. Вычислите $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m}$ для

a) $f = \frac{1}{x-y}$;

b) $f = e^{xy}$.

Задача 2. Постройте на плоскости графики следующих параметрически заданных функций. Выделите однозначные ветви $y(x)$ и наидите для них интервалы монотонности и выпуклости.

a) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$;

b) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$;

c) $x = \cos(2t)$, $y = \sin(3t)$;

d) $x = t\ln(t)$, $y = \ln(t)/t$.

Задача 3. Постройте на плоскости графики следующих неявно заданных функций. Выделите однозначные ветви $y(x)$ и наидите для них интервалы монотонности.

a) $x^3 + y^3 = 3xy$;

b) $e^{x+y} = xy$;

c^*) $x^y = y^x$.

Задача 4. Пусть кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что в точке этой кривой $O = (x_0, y_0)$ дифференциал F отличен от нуля.

a) Запишите уравнение касательной к кривой в точке O через частные производные F.

b) Пусть на плоскости даны точки A и B. Рассмотрим сумму расстояний от точек A и B до точки кривой. Предположим, что она принимает максимальное или минимальное значение в точке O. Докажите, что прямые через AO и BO образуют с касательной в O одинаковые углы.

Задача 5*. Пусть кривая задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$. Введём обозначения для производных $F_a = \frac{\partial F}{\partial a}$, $F_{ab} = \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}$, где a и b равны x или y.

a^*) Докажите, что точки перегиба этой кривой удовлетворяют дополнительному уравнению

$$F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0.$$

b^*) Пусть $F(x, y) = 0$, $F_x(x, y) = 0$, $F_y(x, y) = 0$. Предположим, что уравнение

$$F_{xx}(x, y) + 2F_{xy}(x, y)t + F_{yy}(x, y)t^2 = 0$$

имеет два различных вещественных решения t_1 и t_2. Докажите, что в точку (x, y) входят две однозначные ветви неявной функции под углами, тангенс которых равен t_1 и t_2.

c^*) Как может выглядеть график неявной функции, когда t_1 и t_2 совпадут?

Задача 6. Рассмотрим полярную систему координат $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

a) Запишите $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial \phi}$ через $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$.

b) Запишите $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ через $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial \phi}$.

c) Запишите оператор Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ через первые и вторые производные по r и ϕ.

Задача 7. Пусть u и v заданы на плоскости следующими соотношениями. Вычислите (выразите через x и y) производные u и v по x и y, а также $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

a) $xy - yv = 0$, $yu + xv = 1$;

b) $u + v = x + y$, $\frac{\sin(u)}{\sin(v)} = \frac{x}{y}$.

Задача 8*. Докажите, что гармонические функции от x и y будут гармоническими для новых переменных u и v, заданных функциями $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, удовлетворяющими условиям Коши-Римана $\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \phi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$.