§11. Пределы

11.1. Пределы диаграмм. Пусть $\mathscr{N}$ — малая категория. Будем думать о ней как о «шаблоне» диаграммы, вершинами которой являются объекты $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{N}$, а стрелками — всевозможные морфизмы $(\mu \longrightarrow \nu) \in \mathrm{Mor}\mathscr{N}$. С этой точки зрения каждый функтор $X : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$ доставляет «реализацию» диаграммы $\mathscr{N}$ в категории $\mathscr{C}$, т. е. представляет собой диаграмму в $\mathscr{C}$, в вершинах которой стоят объекты $X_\nu = X(\nu) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, занумерованные «индексами» $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{N}$, а стрелками служат X-образы $X_{\nu\mu} = X_{\mu\to\nu} : X_\mu \longrightarrow X_\nu$ стрелок $(\mu \longrightarrow \nu) \in \mathrm{Mor}\mathscr{N}$.

Например, каждый объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{C}$, в которой все $\overline{C}_\nu = C$, а все $\overline{C}_{\nu\mu} = \mathrm{Id}_C$. С любой диаграммой $X \in \mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})$ связан предпучок множеств

$$\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et \,:\, C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})}(\overline{C}, X)$$

Если он представим, т. е. существует объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, такой что имеется естественный по $C \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, L) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})}(\overline{C}, X)\,, \tag{11-1}$$

то L называют *пределом*[1] диаграммы X и пишут $L = \varprojlim X_\nu$.

Двойственным образом, объект $L' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ называют *копределом*[2] диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{C}$ и пишут $L' = \varinjlim X_\nu$, если он копредставляет ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et : C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})}(X, \overline{C})$, т. е. если существует функториальная по $C \in \mathscr{C}$ и $X \in \mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})$ биекция $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(L', C) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})}(X, \overline{C})$.

Как и всякие (ко) представляющие объекты, (ко) пределы могут быть определены при помощи «универсальных свойств». А именно, по формуле (11-1), где надо положить $C = L$, тождественный эндоморфизм Id_L предела $L = \varprojlim X_\nu$ диаграммы $X : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$ соответсвует естественному преобразованию $f : \overline{L} \longrightarrow X$, т. е. набору стрелок $L \xrightarrow{\pi_\nu} X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками $X_{\nu\mu}$ диаграммы X и универсальны в том смысле, что $\forall\, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ с набором стрелок $Y \xrightarrow{\psi_\nu} X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, *существует* и *единственен* морфизм $Y \xrightarrow{\alpha} \varprojlim X_\nu$ в $\mathscr{C}$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha \ \forall\, \nu$.

Упражнение 11.1. Проверьте, что это универсальное свойство задаёт предел однозначно с точностью до *единственного* изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν, а также сформулируйте соответствующее универсальное свойство копредела и докажите, что копредел определяется им однозначно с точностью до единственного изоморфизма.

Упражнение 11.2 (функториальность (ко) пределов). Пусть две разных диаграммы в $\mathscr{C}$

$$X : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C} \quad \text{и} \quad Y : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{C}$$

имеют копределы $N = \varinjlim X_\nu$ и $M = \varinjlim Y_\mu$. Выведите из универсальных свойств копредела, что для любого функтора $\tau : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \longrightarrow Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $N \xrightarrow{\varphi} M$, такой что все диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X_\nu \arrow[r] \arrow[d, "f_\nu"'] & N \arrow[d, "\varphi"] \\
Y_{\tau(\nu)} \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

коммутативны (горизонтальные стрелки — это канонические морфизмы из элементов диаграммы в копредел). Сформулируйте и докажите аналогичное функториальное свойство пределов.

Упражнение 11.3 (перестановочность сопряжённых функторов с (ко) пределами). Говорят, что функтор $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и любой

[1] в некоторых кругах пределы иногда называют *обратными пределами* или *проективными пределами*
[2] в некоторых кругах копределы иногда называют *прямыми пределами* или *инъективными пределами*

диаграммы $\Phi : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в $\mathscr{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F\circ\Phi$ в $\mathscr{D}$. Проверьте, что всякий левый сопряжённый функтор (см. n° 10.9) перестановочен с копределами, а всякий правый — с пределами.

11.1.1. Пример: начальный и конечный объекты. Простейшим «шаблоном диаграммы» является пустая категория $\mathscr{N} = \varnothing$. Поскольку из пустого множества имеется ровно одно отображение в любой класс, $\mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})$ — это одноэлементное множество, «пустая диаграмма». Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Таким образом, для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ каждое из множеств $\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Fin})$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Or}, X)$ состоит ровно из одного элемента.

Упражнение 11.4. Найдите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, (произвольных) групп, коммутативных колец.

11.1.2. Пример: прямые (ко) произведения. Малая категория $\mathscr{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{N}$. Соответствующие диаграммы $X : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок *между* ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно

$$\prod_\nu X_\nu \quad (\text{произведение}) \quad \text{и} \quad \coprod_\nu X_\nu \quad (\text{копроизведение})\,.$$

Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения пары объектов, уже обсуждавшиеся нами в n° 10.8.1 и n° 10.8.2.

Упражнение 11.5. Убедитесь, что для существования любых конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых пар объектов.

11.1.3. Пример: (ко)уравнители. Пусть $\mathscr{N} = \{\bullet \rightrightarrows \bullet\}$ состоит из двух объектов и имеет ровно два нетождественных морфизма между ними[1]. Реализация такой диаграммы в категории $\mathscr{C}$ представляет собой пару стрелок

$$X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} Y\,,$$

и её (ко) предел называется *(ко) уравнителем*[2] стрелок φ и ψ.

В категории множеств уранитель — это множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ относительно $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении

$$X \xrightarrow{\varphi\times\psi} Y \times Y\,. \tag{11-2}$$

а коуравнитель представляет собою фактор множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[3] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения (11-2).

Упражнение 11.6. Проверьте сказанное и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп и коммутативных колец.

Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор-объекты» при помощи «образующих и соотношений».

---

[1]так что всего $\mathrm{Mor}\mathscr{N}$ состоит из 4 элементов

[2]по-английски (*co*)*equalizer*

[3]напомним, что *отношение эквивалентности* на Y — это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (т. е. содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. (y_1, y_2), $(y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$); пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности, и всякое отображение $Y \xrightarrow{\xi} Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $Y \xrightarrow{\xi'} Z'$ тогда и только тогда пропускается через $Y \xrightarrow{\xi} Z$, т. е. представляется в виде композиции $\xi' = \eta\circ\xi$ с некоторой стрелкой $Z \xrightarrow{\eta} Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$ (т. е. эквивалентность, отвечающая ξ, *сильнее*, или *тоньше*, или *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ')

Например, окружность S^1, склеенная из отрезка так, как показано на рис. 10◇3, является коуравнителем в категории $\mathscr{T}op$ пары морфизмов

$$\Delta^0 \underset{1}{\overset{0}{\rightrightarrows}} \Delta^1 , \tag{11-3}$$

отображающих точку в концы отрезка.

Аналогично, *конус непрерывного отображения* $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathscr{T}op$ — это коуравнитель f и постоянного отображения, стягивающего X в какую-нибудь точку[1] $y \in Y$.

Ещё пример: (ко) ядро гомоморфизма $A \xrightarrow{f} B$ в категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей над (произвольным) кольцом — это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма.

Отметим, что задание объекта «образующими и соотношениями» далеко не так конструктивно, как может показаться на первый взгляд, и даже вопрос о нетривиальности коуравнителя часто оказывается очень трудным[2].

Предложение 11.1

Для того чтобы в категории $\mathscr{C}$ существовали пределы любых конечных диаграмм необходимо и достаточно, чтобы в $\mathscr{C}$ существовали: конечный объект, прямые произведения любых двух объектов, и уравнители любых двух стрелок $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} Y$ между любыми двумя объектами.

Доказательство. Пусть $\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{C}$ — конечная диаграмма. Рассмотрим два прямых произведения объектов диаграммы:

$$A = \prod_{\nu} X_{\nu} , \qquad B = \prod_{\mu\to\nu} X_{\nu}$$

такие что в A все объекты диаграммы входят по одному разу, а в B сомножителей столько же, сколько стрелок в $\mathscr{N}$, и каждый объект X_ν диаграммы входит столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Имеются два очевидных морфизма $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$:

$$\alpha = \prod_{\mu\to\nu} X_{\nu\mu}\left(\pi_\mu(A)\right) \ , \quad \beta = \prod_{\mu\to\nu} \mathrm{Id}_{X_\nu}\left(\pi_\nu(A)\right) \ ,$$

где $A \xrightarrow{\pi_\eta} X_\eta$ суть канонические проекции произведения на сомножители. Уравнитель стрелок a и β является пределом диаграммы X. □

Упражнение 11.7. Тщательно проверьте последнее утверждение, а также сформулируйте и докажите двойственный критерий существования копределов конечных диаграмм.

11.1.4. Пример: послойные (ко) произведения. Предел диаграммы вида

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

называется *послойным* (или *расслоенным*) *произведением*. Конкретная реализация такой диаграммы выглядит как $X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$, и её предел обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd}
 & X \underset{B}{\times} Y \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
X \arrow[dr, "\xi"'] & & Y \arrow[dl, "\eta"] \\
 & B &
\end{tikzcd} \tag{11-4}$$

[1] чтобы сделать эту точку канонической в гомотопической топологии рассматривают категорию $\mathscr{T}op_*$ пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную

[2] например, в категории групп он алгоритмически неразрешим

универсальный в том смысле, что для любого другого такого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\ X \arrow[dr, "\xi"'] & & Y \arrow[dl, "\eta"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

имеется единственный морфизм $Z \xrightarrow{\varphi'\times\psi'} X \underset{B}{\times} Y$, такой что $\varphi' = \varphi\circ(\varphi'\times\psi')$, $\psi' = \psi\circ(\varphi'\times\psi')$.

Упражнение 11.8. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (11-4) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \longrightarrow B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b)\times\psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Оборачивая *все* стрелки в предыдущем определении, назовём *послойным копроизведением* $X \underset{B}{\otimes} Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$ вида $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$. Послойное копроизведение вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} & X \underset{B}{\otimes} Y & \\ X \arrow[ur, "\varphi"] & & Y \arrow[ul, "\psi"'] \\ & B \arrow[ul, "\xi"] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

такой, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "\varphi'"] & & Y \arrow[ul, "\psi'"'] \\ & B \arrow[ul, "\xi"] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $X \underset{B}{\otimes} Y \xrightarrow{\varphi'\otimes\psi'} Z$, такой что

$$\varphi' = (\varphi'\otimes\psi')\circ\varphi \quad \text{и} \quad \psi' = (\varphi'\otimes\psi')\circ\psi\,.$$

Упражнение 11.9. Явно опишите послойные (ко)произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей[2].

[1] в теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*

[2] подсказка: диаграмма $A \longleftarrow K \longrightarrow A$ в категории коммутативных колец с единицей означает, что A и B являются K-алгебрами; соответствующее копроизведение есть не что иное, как *тензорное произведение* K-алгебр $A \underset{K}{\otimes} B$, которое можно описать как фактор свободного K-модуля с базисом $A\times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями $(\varkappa_1 a_1 + \varkappa_2 a_2, \varkappa_1' b_1 + \varkappa_2' b_2) - \sum\limits_{i,j=1}^{2} \varkappa_i \varkappa_j' (a_i, b_j)$ (ср. с n° 10.9.1)

Упражнение 11.10*. Эта задача для тех, кто знаком топологией. Пусть линейно связное топологическое пространство $X \cup Y$ представилось в виде объединения линейно связных подпространств X, Y с линейно связным персечением $X \cap Y$. Докажите следующую *теорему Зейферта – ван Кампена* о фундаментальных группах: $\pi_1(X \cup Y) = \pi_1(X) \underset{\pi_1(X\cap Y)}{\otimes} \pi_1(Y)$.

Определение 11.1
Категория $\mathscr{C}$ называется (*ко*) *замкнутой*, если для любой малой категории $\mathscr{N}$ любая диаграмма $\mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$ имеет (ко) предел в $\mathscr{C}$.

Упражнение 11.11. Докажите, что для замкнутости категории $\mathscr{C}$ достаточно существования в $\mathscr{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathscr{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Из упр. 11.11 и упр. 11.6 вытекает, что категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп и коммутативных колец с единицей замкнуты и козамкнуты.

11.1.5. Пример: пределы направленностей. Пусть $\mathscr{N}$ — произвольный ЧУМ, рассматриваемый как категория (см. пример на n° 10.1.1), в которой неравенства $\nu \leqslant \mu$ обозначаются стрелками $\nu \longrightarrow \mu$. Диаграммы $X : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$ называются *частично упорядоченными*.

Упражнение 11.12. Проверьте, что копредел частично упорядоченной диаграммы $X : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{S}et$ в категории множеств допускает следующее описание. Назовём *хвостом* диаграммы X любое семейство элементов $x_\nu \in X_\nu$ обладающее двумя свойствами:

а) вместе с каждым индексом ν, представленным в семействе, в этом же семействе представлены и все индексы $\mu > \nu$ из $\mathscr{N}$;

б) для любых двух членов x_μ и x_ν одного семейства $X_{\nu\mu}(x_\mu) = x_\nu$ при $\mu < \nu$.

Назовём хвосты $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ *эквивалентными*, если у них общий «конец», т. е. для любых элементов x_α и y_β существует индекс $\gamma > \alpha, \beta$, такой что $X_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = X_{\gamma\beta}(y_\beta)$. Убедитесь, что это действительно отношение эквивалентности и что множество классов эквивалентных хвостов изоморфно $\varinjlim X$.

В анализе и топологии особенно любят ЧУМы $\mathscr{N}$, в которых $\forall\, \mu, \nu \;\exists\, \varkappa \geqslant \mu, \nu$. Такие ЧУМы иногда называют *направленностями*. Соответствующие им ковариантные диаграммы

$$\mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$$

называются *прямыми* (или *индуктивными*) системами, а контравариантные диаграммы

$$\mathscr{N}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{C}$$

проективными (или *обратными*) системами.

Так, любой замкнутый относительно пересечения набор открытых множеств образует обратную систему в категории $\mathscr{U}(X)$ всех открытых подмножеств данного топологического пространства X. Примером такой системы является набор открытых окрестностей любого фиксированного подмножества $Z \subset X$.

Упражнение 11.13. Удостоверьтесь, что у этой обратной системы есть копредел — объединение всех множеств из системы, и выясните, как устроены в $\mathscr{U}(X)$ послойное произведение $U \underset{X}{\times} V$ и послойное копроизведение $U \underset{\varnothing}{\otimes} V$.

Другой пример: конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1$, задающие разбиение отрезка $[\,0\,,\,1\,]$ на непересекающиеся интервалы (как при определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения.

Упражнение 11.14. Найдите копредел этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами[1].

[1] ответ: $[\,0\,,\,1\,]$

Упражнение 11.15. Возьмём в качестве $\mathscr{N}$ чум $\mathbb{N}$ со стандартным (полным) порядком, зафиксируем простое число p и положим $A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. В категории абелевых групп $\mathscr{A}b$ найдите[1]

а) предел $\varprojlim A_n$ обратной системы канонических факторизаций $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{nm}} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$

б) копредел $\varinjlim A_n$ прямой системы вложений $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \xhookrightarrow{[1]\mapsto[p^{n-m}]} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Упражнение 11.16. Рассмотрим на чуме $\mathscr{N} = \mathbb{N}$ частичный порядок, заданный отношением делимости $n \leqslant m \iff n$ делит m, и положим $B_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. В категории абелевых групп найдите[2]:

а) предел $\varprojlim B_n$ обратной системы канонических факторизаций $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{nm}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

б) копредел $\varinjlim B_n$ прямой системы вложений $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xhookrightarrow{[1]\mapsto[n/m]} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

11.1.6. Пример: локализация коммутативного кольца. Подмножество S коммутативного кольца K с единицей называется *мультипликативным*, если оно замкнуто относительно умножения, содержит единицу и не содержит нуля. Каждое мультипликативное множество $S \subset K$ можно воспринимать как категорию, в которой $\mathrm{Hom}_S(f,g) = \{a \in K \mid af = g\}$. Зададим функтор из этой категории в категорию K-модулей, посылая каждый объект $s \in S$ в свободный K-модуль ранга один с образующей, которую мы обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а каждую стрелку $a \in \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм, переводящий базисный элемент $\left[\frac{1}{s_1}\right]$ в $a \cdot \left[\frac{1}{s_2}\right]$.

Упражнение 11.17. Покажите, что

а) копредел прямой системы естественных вложений $S^{-1}K \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim\limits_{s\in S} K \cdot \left[\frac{1}{s}\right]$ существует и может быть описан как модуль, состоящий из классов эквивалентности дробей a/s с $a \in K$, $s \in S$ и $a_1/s_1 \sim a_2/s_2 \iff s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ для некоторого $s \in S$;

б) на $S^{-1}K$ имеется каноническая структура кольца[3] (и K-алгебры).

Упражнение 11.18. Обобщите предыдущую конструкцию на произвольный K-модуль M: покажите, как по данному мультипликативному множеству $S \subset K$ и данному K-модулю M построить прямую систему стрелок, копределом которой будет модуль $S^{-1}M$ дробей вида m/s с $m \in M$, $s \in S$. Опишите явно отношение эквивалентности между такими дробями, убедитесь, что они образуют модуль как над K, так и над $S^{-1}K$, и докажите, что $S^{-1}M \simeq S^{-1}K \underset{K}{\otimes} M$.

Сам термин «локализация» пришёл из алгебраической геометрии, где в роли коммутативного кольца K выступает алгебра полиномиальных функций $\mathbb{F}[X]$ на аффинном алгебраическом многообразии X. Функции $f \in \mathbb{F}[X]$, отличные от нуля в данной точке $x \in X$ образуют мультипликативную систему, и соответствующая локализация называется *локальным кольцом* точки x.

11.2. Пределы предпучков.

С каждым предпучком множеств F на малой категории $\mathscr{C}$ можно функториально связать категорию индексов $\mathscr{E}_F$, объектами которой являются всевозможные естественные преобразования $h_A \xrightarrow{\alpha} F$ с произвольными[4] $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Стрелки из объекта $h_A \xrightarrow{\alpha} F$ в объект $h_B \xrightarrow{\beta} F$ в категории $\mathscr{E}_F$ — это всевозможные стрелки

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(h_A, h_B)\,, \tag{11-5}$$

такие что $\beta\circ\varphi = \alpha$ в $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$. Эта категория индексов тавтологически порождает две диаграммы (одну — в категории $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$, другую — в самой категории $\mathscr{C}$), которые включаются

[1] ответы: $\varprojlim A_n = \mathbb{Z}_p$ есть множество целых p-адических чисел, а $\varinjlim A_n \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ состоит из классов дробей вида z/p^ℓ с $z \in \mathbb{Z}$, рассматриваемых с точностью до целой части

[2] ответы: $\varinjlim B_n = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, а $\varprojlim B_n = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ есть неархимедово пополнение $\mathbb{Z}$ (т. е. прямое произведение всех колец целых p-адических чисел по всем простым p)

[3] сложение и умножение дробей производится по стандартным правилам

[4] напомним, что по лемме Ионеды такие естественные преобразования биективно соответствуют элементам множеств $F(A)$

в коммутативный треугольник:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) \\
\mathscr{E}_F \arrow[ur, "s_F"] \arrow[dr, "\sigma_F"'] & \\
 & \mathscr{C} \arrow[uu, hook, "h_\bullet"', "\text{вложение Ионеды}"]
\end{tikzcd}
\tag{11-6}
$$

Каждый «индекс» $\left(h_A \xrightarrow{\alpha} F\right)$ переводится функтором $\mathscr{E}_F \xrightarrow{s_F} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$ в представимый предпучок h_A, а функтором $\mathscr{E}_F \xrightarrow{\sigma_F} \mathscr{C}$ — в сам объект A. Оба функтора тождественно действуют на все стрелки (11-5) категории $\mathscr{E}_F$. Из леммы Ионеды (см. лем. 10.2 на стр. 91) мы получаем

Следствие 11.1
Предпучок F является копределом диаграммы s_F (таким образом, любой предпучок множеств на малой категории канонически представляется в виде копредела диаграммы представимых предпучков). □

Предложение 11.2
Категория предпучков множеств на любой малой категории козамкнута.

Доказательство. Пусть имеется диаграмма предпучков $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{G_\nu} \mathscr{S}et$. Поскольку категория множеств козамкнута, для любого объекта $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ существует копредел $L(A) = \varinjlim G_\nu(A)$. В силу функториальности копредела (см. упр. 11.2) любая стрелка $A \longrightarrow B$ в $\mathscr{C}$ функториально порождает стрелку

$$L(B) = \varinjlim G_\nu(B) \longrightarrow \varinjlim G_\nu(A) = L(A)$$

так что сопоставление $A \mapsto L(A)$ является предпучком множеств на $\mathscr{C}$. Поскольку при любом $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ множество $L(A)$ обладает универсальными свойствами копредела диаграммы $G_\nu(A)$ в $\mathscr{S}et$, предпучок $A \mapsto L(A)$ является копределом диаграммы предпучков $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{G_\nu} \mathscr{S}et$. □

Теорема 11.1 (о «продолжении по непрерывности»)
Вложение Ионеды

$$\mathscr{C} \xrightarrow{A \mapsto h_A} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$$

перестановочно с копределами, и для любого перестановочного с копределами ковариантного функтора $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ в произвольную козамкнутую категорию $\mathscr{D}$ существует единственный с точностью до изоморфизма перестановочный с копределами функтор $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) \xrightarrow{E} \mathscr{D}$, такой что $E \circ h_* \simeq F$.

Доказательство. Поскольку всякий предпучок X на $\mathscr{C}$ является копределом диаграммы s_X из (11-6), требование перестановочности функтора E с копределами не оставляет иной возможности, как определить действие E на объекты формулой $E(X) = \varinjlim F \circ \sigma_X$ (прямой предел диаграммы в категории $\mathscr{D}$, полученной применением функтора F к диаграмме σ_X из (11-6)). В силу функториальности копределов, действие E на стрелки при этом тоже однозначно фиксируется: всякое естественное преобразование предпучков $X \longrightarrow Y$ задаёт преобразование диаграмм $\sigma_X \longrightarrow \sigma_Y$, к которому применимо упр. 11.2. Чтобы проверить, что $X \longrightarrow E(X)$ действительно задаёт перестановочный с копределами функтор, мы воспользуемся упр. 10.16. С каждым $D \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ связан предпучок $\Gamma_D : C \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C), D)$ на $\mathscr{C}$.

Упражнение 11.19. Убедитесь, что это действительно предпучок, и что соответствие $D \longmapsto \Gamma_D$ задаёт ковариантный функтор $\mathscr{D} \xrightarrow{\Gamma} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$.

Функториальные по $D \in \mathscr{D}$ отождествления

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(X, \Gamma(D)) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}\big(\varinjlim_{s_X} h_A, \Gamma_D\big) =$$
$$= \varinjlim_{s_X} \operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}\big(h_A, \Gamma_D\big) = \varinjlim_{s_X} \Gamma_D(A) = \varinjlim_{F\circ s_X} \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), D) =$$
$$= \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}\big(\varinjlim_{F\circ s_X} F(A), D\big) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(E(X), D)$$

показывают, что объект $E(X)$ копредставляет ковариантный функтор

$$\mathscr{D} \xrightarrow{D \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(X,\Gamma(D))} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$$

По упр. 10.16 $X \longmapsto E(X)$ тогда является функтором, сопряжённым слева к функтору

$$\Gamma : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{S}h(\mathscr{C}),$$

и автоматически перестановочен с копределами в виду упр. 11.3. $\square$

11.2.1. Пример: геометрическая реализация симплициальных комплексов. Согласно теор. 11.1, функтор $\Delta \xrightarrow{\underline{n} \mapsto \Delta^n} \mathscr{T}op$ из n° 10.2.1, допускает каноническое «продолжение по непрерывности» до функтора

$$F : \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\Delta) \xrightarrow{X \mapsto |X|} \mathscr{T}op,$$

сопоставляющего каждому предпучку X на Δ топологическое пространство $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* симплициального множества X.

Например, n-мерная сфера S^n, возникающая в результате стягивания всей границы n-мерного симплекса Δ^n в одну точку (см. рис. 10◇4 на стр. 87), является копределом в категории $\mathscr{T}op$ диаграммы, состоящей из *всех*[1] стрелок $\Delta^m \longrightarrow \Delta^n$ с $m < n$, приходящих из категории Δ, т. е.

$$S^n = \varinjlim_{\mathscr{T}op} (\Delta^m \longrightarrow \Delta^n) = \Big| \varinjlim_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\Delta)} \big(h_{\underline{m}} \longrightarrow h_{\underline{n}}\big)\Big| .$$

В частности, ответ на вопрос упр. 10.5 таков: множество X_k k-мерных симплексов «вырожденной триангуляции» сферы S^n, показанной нарис. 10◇4 на стр. 87, является копределом (в категории множеств) диаграммы отображений $\big\{h_{\underline{m}}(\underline{k}) \longrightarrow h_{\underline{n}}(\underline{k})\big\} = \{\operatorname{Hom}_\Delta(\underline{k}, \underline{m}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Delta(\underline{k}, \underline{n})\}$, и получается из множества стрелок $\underline{k} \longrightarrow \underline{n}$ склеиванием всех несюрьективных стрелок в одну точку.

Упражнение 11.20. Найдите число элементов во всех X_k (в частности, убедитесь, что оно равно 1 при $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$, равно 2 при $k = n$, и *неограниченно растёт* с ростом k).

[1] включая и все вырождения (ср. с представлением окружности коуравнителем диаграммы $\Delta^0 \overset{0}{\underset{1}{\rightrightarrows}} \Delta^1$, обсуждавшемся на стр. 97)