Индуцированные представления.

A10◇1. Покажите, что индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы изоморфны друг другу.

A10◇2. Выразите через $[G : H]$, $|C|$ и $|C \cap H|$ значение на классе сопряжённости $C \subset G$ характера группы G, индуцированного тривиальным 1-мерным характером подгруппы $H \subset G$.

A10◇3. Разложим пересечение $C \cap H$ класса сопряжённости $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ в объединение классов H-сопряжённости $D_1 \sqcup D_2 \sqcup \cdots \sqcup D_s$. Выразите через $[G : H]$, $|D_i|$ и $\chi(D_i)$ значение на C характера группы G, индуцированного характером χ подгруппы H.

A10◇4. Опишите представление S_4, индуцированное
- **а)** двумерным неприводимым представлением подгруппы $S_3 = \mathrm{Stab}_{\{4\}}$
- **б)** одномерным представлением циклической подгруппы 4-го порядка, образующая которой действует умножением на $i \in \mathbb{C}$;
- **в)** одномерным представлением циклической подгруппы 3-го порядка, образующая которой действует умножением на $e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

A10◇5 (аффинная группа прямой). Пусть A — группа аффинных преобразований $x \mapsto ax+b$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$. Покажите, что
- **а)** $A = T \rtimes \mathbb{F}_p^*$, где $T \subset A$ — подгруппа параллельных переносов, а $\mathbb{F}_p^* \subset A$ — подгруппа гомотетий относительно начала координат, и перечислите классы сопряжённости в A .
- **б)** представление A в пространстве комплекснозначных функций на $\mathbb{A}^1$ с нулевой суммой значений неприводимо и индуцировано одномерным представлением абелевой подгруппы T с характером $\mathbb{F}_p \ni t \mapsto e^{2\pi i t/p} \in \mathrm{U}(1)$, и вычислите характер этого представления
- **в)** все остальные неприводимые представления группы A одномерны

A10◇6 (группа Гейзенберга). Свяжем с n-мерным векторным пространством L над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ с $p > 2$ *группу Гейзенберга* H_p^n , образованную тройками $(x, u, u^*) \in \mathbb{F}_p \times L \times L^*$ с операцией $(x_1, u_1, u_1^*)\circ(x_2, u_2, u_2^*) \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2 + (\langle\, u_2^*\, ,\, u_1 \,\rangle - \langle\, u_1^*\, ,\, u_2 \,\rangle)/2,\ u_1 + u_2,\ u_1^* + u_2^*)$, и обозначим через $H' \simeq \mathbb{F}_p \times L \subset H_p^n$ абелеву подгруппу, образованную тройками вида $(x, u, 0)$. Покажите, что
- **а)** H_p^n группа и перечислите её классы сопряжённости
- **б)** H_p^1 изоморфна группе верхних унитреугольных 3×3 матриц над $\mathbb{F}_p$
- **в)** для каждого $a \in \mathbb{F}_p$ комплексное представление W_a группы H_p^n, индуцированное одномерным представлением подгруппы H' с характером $\psi_a(x, u, 0) = e^{2\pi i a x/p}$, неприводимо, и все они различны; вычислите размерность и характер представления W_a
- **г)** все остальные неприводимые представления группы H_p^n одномерны.

A10◇7 (группа Гейзенберга 2). При $p = 2$ обозначим через H группу, порождённую 2^{2n+2} образующими ± 1, $\pm u_1$, … , $\pm u_{2n+1}$ с соотношениями $u_i^2 = -1$, $u_i u_j = -u_j u_i$. Покажите, что
- **а)** H состоит из 2^{2n+2} элементов $\pm u_I = \pm u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_k}$, где $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ пробегает всевозможные упорядоченные подмножества в $\{1,\,2,\,\dots\,,\,(n+1)\}$ и $u_\varnothing = 1$
- **б)** элементы $\pm u_I$, отвечающие индексам I чётной длины, образуют в H подгруппу (она называется *группой Гейзенберга* H_2^n)
- **в)** H_2^1 изоморфна группе кватернионных единиц $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

A10◇8. Опишите **а)** центр **б)** классы сопряжённости **в)** неприводимые представления H_2^n

A10◇9*. Покажите, что в разложениях тензорных степеней произвольного эффективного представления конечной группы встречаются все её неприводимые представления.

A10◇10*. Покажите, что каждый неодномерный неприводимый характер конечной группы зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости.