Задачи по группам и алгебрам Ли – 4

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

В этом листке V_n – неприводимое представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ размерности $n+1$.

1. а) Покажите, что форма Киллинга на алгебре Ли инвариантна относительно всех ее дифференцирований, т.е для любого дифференцирования $D: L \to L$ имеем $K(D(x), y) + K(x, D(y)) = 0$. (*Указание:* пусть $D: L \to L$ – дифференцирование, тогда $\mathrm{ad}(D(x)) = D \circ \mathrm{ad}\, x - \mathrm{ad}\, x \circ D$). **б)** Докажите, что все дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ внутренние.

2. а) Разложите представление $V_n \otimes V_m$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в прямую сумму неприводимых. **б)** Найдите кратность тривиального представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в представлении $V_1^{\otimes n}$.

3. Для конечномерного представления (V, ρ) алгебры Ли L определим симметрическую билинейную форму Φ_V на пространстве L следующей формулой: $\Phi_V(x, y) := \mathrm{tr}\, \rho(x)\rho(y)$. **а)** Докажите, что это инвариантная форма на присоединенном представлении алгебры Ли L. **б)** Вычислите Φ_V для всех неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

4. Для каких n представление V_n допускает невырожденную инвариантную **а)** симметрическую форму; **б)** кососимметрическую форму?

5. Пусть X – нильпотентная $n \times n$-матрица ранга $n-1$ (жорданов блок вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$).
Найдите жорданову нормальную форму оператора $\mathrm{ad}\, X : A \mapsto XA - AX$ в пространстве $n \times n$-матриц. (*Указание:* посмотрите на оператор e в представлении $V_{n-1} \otimes V_{n-1}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$).

6*. а) Докажите, что ядро гомоморфизма универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to \mathrm{End}(V_n)$ есть двусторонний идеал, порожденный элементами $ef + fe + \frac{1}{2}h^2 - \frac{n(n+2)}{2}$ и f^{n+1}; **б)** Докажите, что ядро гомоморфизма универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to \mathrm{End}(V_0 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_n)$ есть двусторонний идеал, порожденный элементом f^{n+1}.

7*. а) Симметрическая группа S_n действует сплетающими операторами в представлении $V_1^{\otimes n}$ (перестановкой сомножителей). Получается представление группы S_n в пространстве $V_1^{\otimes n}$. **а)** Докажите, что в разложении $V_1^{\otimes n}$ на неприводимые представления группы S_n встречаются только те неприводимые представления, которые соответствуют диаграммам Юнга высоты не более 2. **б)** С какими кратностями встречаются такие представления?

8*. Найдите все неразложимые представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ из категории $\mathcal{O}$, на которых оператор Казимира действует **а)** нулем; **б)** нильпотентно.

9*. Алгебра Ли W_1 полиномиальных векторных полей на комплексной прямой состоит их всех дифференцирований алгебры $\mathbb{C}[z]$ (т.е. выражений вида $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, где $f(z)$ – многочлен). Представление алгебры Ли W_1 в пространстве тензорных полей веса λ, состоящем из выражений вида $g(z)(dz)^\lambda$, задается формулой $\rho(f(z)\frac{\partial}{\partial z})g(z)(dz)^\lambda = (f(z)g'(z) - \lambda f'(z)g(z))(dz)^\lambda$. **а)** При каких значениях $\lambda \in \mathbb{C}$ это представление приводимо? **б)** При каких значениях $\lambda \in \mathbb{C}$ ограничение этого представления на подалгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (состоящую из векторных полей вида $(az^2 + bz + c)\frac{\partial}{\partial z}$) приводимо? **в)** Вычислите действие элемента Казимира на этих представлениях.

10*. а) Докажите, что пучок векторных полей на $\mathbb{CP}^1$ есть $\mathcal{O}(2)$. (*Указание:* предъявите какое-нибудь глобальное сечение этого пучка и посчитайте его нули). **б)** Докажите, что алгебра Ли глобальных сечений этого пучка изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. **в)** Из пункта (б) следует, что имеется гомоморфизм из алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ в алгебру глобальных дифференциальных операторов на $\mathbb{CP}^1$, переводящий алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в глобальные векторные поля. Найдите ядро этого гомоморфизма. **г)** Докажите, что этот гомоморфизм сюръективен.