Лекции по группам и алгебрам Ли – 4,5

Более подробно этот материал написан в главе 1 книги “Семинар Софус Ли”.

Универсальная обертывающая алгебра

Определение 1. *Универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли L называется пара $U(L), \epsilon$, где $U(L)$ – ассоциативная алгебра с единицей, $\epsilon : L \to U(L)^-$ – гомоморфизм алгебр Ли, обладающая следующим *универсальным свойством*: для любой ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $\varphi : L \to A^-$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\tilde{\varphi} : U(L) \to A$, такой, что $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \epsilon$.

Из универсального свойства, в частности, следует, что любое представление алгебры Ли L несет структуру представления ассоциативной алгебры $U(L)$, причем любой гомоморфизм представлений алгебры Ли L есть также и гомоморфизм представлений $U(L)$.

Предложение 1. *Универсальная обертывающая алгебра единственна с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Это очевидно из универсального свойства. □

Предложение 2. *Универсальная обертывающая алгебра существует для любой алгебры Ли L.*

Доказательство. Зададим алгебру $U(L)$ явно образующими и соотношениями. Пусть $T(L) = \mathbb{C} \oplus L \oplus L \otimes L \oplus \dots$ – тензорная алгебра пространства L (т.е. свободная ассоциативная алгебра, порожденная пространством L) и пусть $J \subset T(L)$ – двусторонний идеал, порожденный элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ для всех элементов $x, y \in L$. Тогда ассоциативная алгебра $U(L) := T(L)/J$ с тождественным отображением $\epsilon : L \to L \subset T(L)$ обладает требуемым универсальным свойством. Иначе говоря, пусть $x_1, \dots x_n$ – базис в алгебре Ли L и пусть $[x_i, x_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$. Тогда $U(L)$ есть ассоциативная алгебра с образующими $x_1, \dots, x_n$ и определяющими соотношениями $x_i x_j - x_j x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$, причем $\epsilon(x_i) = x_i$. □

Пример: Для абелевой алгебры Ли L с базисом $x_1, \dots, x_n$ универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ есть симметрическая алгебра $S(L) := T(L)/(x_i x_j - x_j x_i)$, т.е. алгебра многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Коумножение

Определение 2. *Коумножением* в ассоциативной алгебре A называется гомоморфизм ассоциативных алгебр $\Delta : A \to A \otimes A$ такой, что композиция $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta : A \to A \otimes A \otimes A$ равна композиции гомоморфизмов $(1 \otimes \Delta) \circ \Delta : A \to A \otimes A \otimes A$. Это означает, что на двойственном пространстве A^* оператор $\Delta^* : A^* \otimes A^* \to A^*$ задает ассоциативное умножение. Ассоциативная алгебра с коумножением называется *биалгеброй*.

Предложение 3. *Следующий оператор $\Delta : U(L) \to U(L) \otimes U(L)$ является (коммутативным) коумножением в алгебре $U(L)$: $\Delta(\epsilon(x)) = \epsilon(x) \otimes 1 + 1 \otimes \epsilon(x)$ для каждого $x \in L$.*

Доказательство. Надо проверить, что для элементов $\Delta(x_i)$ выполняются определяющие соотношения в универсальной обертывающей алгебре. Имеем

$$\begin{aligned}
&\Delta(x_i)\Delta(x_j) - \Delta(x_j)\Delta(x_i) = \\
&= x_i x_j \otimes 1 + x_i \otimes x_j + x_j \otimes x_i + 1 \otimes x_i x_j - (x_j x_i \otimes 1 + x_j \otimes x_i + x_i \otimes x_j + 1 \otimes x_j x_i) = \\
&\qquad = (x_i x_j - x_j x_i) \otimes 1 + 1 \otimes (x_i x_j - x_j x_i) = \Delta([x_i, x_j]).
\end{aligned}$$

□

Другим примером биалгебры является групповая алгебра $\mathbb{C}G$ группы G. Коумножение задается следующим образом: $\Delta(g) = g \otimes g$ для любого $g \in G$.
Упражнение: Какой функционал из $U(L)^*$ является единицей в ассоциативной алгебре $U(L)^*$? А для групповой алгебры?

Градуированные и фильтрованные алгебры

Определение 3. *Градуировка* (неотрицательная $\mathbb{Z}$-градуировка) алгебры A – это разложение пространства A в прямую сумму $A = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n$ такое, что $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$. Элементы пространства A_n называются однородными элементами степени n.

Примеры:

(1) тензорная (свободная) алгебра $T(V) = \mathbb{C} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \ldots$, $T(V)_n := V^{\otimes n}$;
(2) симметрическая алгебра (алгебра многочленов) $S(V) = T(V)/(xy = yx) = \mathbb{C} \oplus V \oplus S^2V \oplus \ldots$, $S(V)_n := S^nV$.

Определение 4. *Фильтрация* алгебры A (возрастающая) – это представление пространства A в виде объединения вложенных подпространств $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A^{(n)}$, $A^{(n-1)} \subset A^{(n)}$ такое, что $A^{(n)} \cdot A^{(m)} \subset A^{(n+m)}$. Элементы пространства $A^{(n)}$ – это элементы "степени не выше n".

Пример: универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ фильтрована по степени выражения через образующие: $U(L)^{(n)} = (\mathbb{C} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \ldots V^{\otimes n})/J$. Иначе говоря, подпространство $U(L)^{(n)}$ порождается мономами степени не выше n от элементов алгебры Ли L.

Определение 5. Пусть $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A^{(n)}$ – фильтрованная алгебра. Определим ассоциативную операцию умножения на пространстве $\operatorname{gr} A := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A^{(n)}/A^{(n-1)}$ следующим образом: пусть $f \in A^{(n)}/A^{(n-1)}$, $g \in A^{(m)}/A^{(m-1)}$. Пусть $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ – представители f, g в $A^{(n)}$ и $A^{(m)}$ соответственно. Тогда элемент $\tilde{f}\tilde{g}$ лежит в $A^{(n+m)}$, причем класс этого элемента по модулю $A^{(n+m-1)}$ не зависит от выбора представителей $\tilde{f}$, $\tilde{g}$. Этот класс и есть по определению $fg \in A^{(n+m)}/A^{(n+m-1)}$. Алгебра $\operatorname{gr} A$ называется *присоединенной градуированной* алгеброй.

Предложение 4. $\operatorname{gr} U(L)$ *– коммутативная алгебра, порожденная пространством* L*. Таким образом, имеется гомоморфизм* $S(L) \to \operatorname{gr} U(L)$.

Доказательство. $\operatorname{gr} U(L)$ порождена пространством L по конструции. Коммутатор любых двух образующих из L (имеющих степень 1) также лежит в L, следовательно, имеет тоже степень 1, а следовательно, в присоединенной градуированной алгебре пропадает. $\square$

Иначе говоря, здесь утверждается, что если $x_1, \ldots x_n$ – базис в алгебре Ли L, то любой элемент из $U(L)$ есть линейная комбинация мономов вида $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, причем старший (по степени) член произведения таких мономов не зависит от порядка сомножителей. Вопрос о *линейной независимости* таких мономов существенно более сложен.

Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта

Теорема 1. $\operatorname{gr} U(L) = S(L)$. *Иначе говоря, если* $x_1, \ldots x_n$ *– базис в алгебре Ли* L*, то мономы* $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ *образуют базис в пространстве* $U(L)$.

Доказательство.

Лемма 1. *Пусть теорема верна для алгебры Ли L, и I – идеал в L. Тогда теорема верна и для факторалгебры Ли L/I.*

Доказательство. Выберем базис $x_1, \ldots x_n$ в алгебре Ли L так, что $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ – базис в I. Тогда двусторонний идеал $U(L)IU(L)$ в $U(L)$, порожденный I, есть пространство, натянутое на мономы вида $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, где по крайней мере один из показателей $k_m, k_{m+1}, \ldots, k_n$ не равен нулю. Следовательно, $U(L/I) = U(L)/U(L)IU(L)$ имеет базис из мономов $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{m-1}^{k_{m-1}}$. □

Всякая алгебра Ли есть фактор свободной алгебры Ли (т.е. свободной неассоциативной алгебры, порожденной $x_1, \ldots x_n$, фактор по тождеству Якоби) по некоторому идеалу. Таким образом, из леммы 1 следует, что теорему достаточно доказать для свободной алгебры Ли $L(x_1, \ldots, x_n)$.

Лемма 2. *Пусть каноническое отображение $\epsilon : L \to U(L)$ инъективно. Тогда теорема верна для алгебры Ли L.*

Доказательство. Индукция по степени мономов. Пусть все мономы степени не выше M линейно независимы и пусть есть нетривиальная линейная комбинация мономов $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ степени $M+1$, равная нулю. Тогда равна нулю и нетривиальная линейная комбинация выражений $\Delta(x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}) - x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \otimes 1 - 1 \otimes x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \in U(L) \otimes U(L)$. Последнее есть

$$\sum_{l_i=1}^{k_i-1} \prod_{i=1}^{n} C_{k_i}^{l_i} x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{l_n} \otimes x_1^{k_1-l_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n-l_n}.$$

По предположению индукции, все слагаемые, появляющиеся в таких выражениях, линейно независимы. Противоречие. □

Лемма 3. *Универсальная обертывающая алгебра свободной алгебры Ли $L(x_1, \ldots, x_n)$ есть свободная ассоциативная алгебра $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.*

Доказательство. Это очевидно из универсального свойства универсальной обертывающей алгебры. □

Лемма 4. *Для свободной алгебры Ли отображение $\epsilon : L \to U(L)$ инъективно.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle^+$ – подпространство в алгебре $\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, натянутое на однородные элементы положительной степени. Определим отображение $P : \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle^+ \to L(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$P(x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}) = \operatorname{ad} x_{i_1} (\operatorname{ad} x_{i_2} (\ldots \operatorname{ad} x_{i_{n-1}} (x_{i_n}) \ldots)).$$

Имеем $P(\epsilon(x)y) = \operatorname{ad} x P(y)$ для любых $x \in L(x_1, \ldots, x_n)$, $y \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle^+$. Отсюда следует, что композиция $P \circ \epsilon : L(x_1, \ldots, x_n) \to L(x_1, \ldots, x_n)$ есть дифференцирование алгебры Ли $L(x_1, \ldots, x_n)$. Поскольку $P \circ \epsilon(x_i) = x_i$, для любого однородного выражения x степени k в алгебре Ли $L(x_1, \ldots, x_n)$ имеем $P \circ \epsilon(x) = kx$ (индукцией по степени). Таким образом, композиция $P \circ \epsilon : L(x_1, \ldots, x_n) \to L(x_1, \ldots, x_n)$ является невырожденным оператором, а значит, $\epsilon : L(x_1, \ldots, x_n) \to U(L(x_1, \ldots, x_n)) = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ инъективно. □

Теорема доказана. □