Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков. В задаче 6 можно пользоваться изоморфизмом $(L^1)^* \cong L^\infty$.

1. Существует ли такая функция $g \in L^2[0,1]$, что $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = f(0)$ 1) для любого многочлена f степени не выше n (где $n \in \mathbb{N}$)? 2) для любого многочлена f?

2. Функция φ на отрезке $[-1,1]$ задана формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = -1, \\ -x & \text{при } -1 < x < 0, \\ x^2 - 1 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Обозначим через μ_φ меру Лебега–Стилтьеса на $[-1,1]$, построенную исходя из функции φ, и рассмотрим функционал

$$f \in C[-1,1]^*, \quad f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,d\mu_\varphi(t).$$

1) Вычислите $\|f\|$. 2) Для произвольной $x \in C[-1,1]$ выразите $f(x)$ через значения функции x и через интегралы каких-либо функций по обычной мере Лебега.

3. Оператор $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ действует по правилу

$$(Tf)(x) = f(1) + xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt.$$

Отождествим стандартным образом пространство $C[0,1]^*$ с пространством мер $M[0,1]$ (так что оператор T^* будет действовать в пространстве $M[0,1]$). Обозначим через μ меру Лебега и положим $\nu = T^*\mu$. Вычислите $\nu([0,1/2])$.

4. Пусть K — компактное топологическое пространство, $F \subset K$ — замкнутое подмножество и $X \subset C(K)$ — замкнутое векторное подпространство. Предположим, что для каждой $g \in C(F)$ найдется такая $f \in X$, что $f|_F = g$. Докажите, что существует $C > 0$ со следующим свойством: для каждой $g \in C(F)$ найдется такая $f \in X$, что $f|_F = g$ и

$$\max_{x \in K} |f(x)| \leqslant C \max_{x \in F} |g(x)|.$$

5. Пусть X — рефлексивное банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что X_0 и X/X_0 рефлексивны.

6. Пусть (f_n) — последовательность ограниченных измеримых по Лебегу функций на $[0,1]$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) существуют такие $C > 0$ и измеримое подмножество $S \subset [0,1]$, мера Лебега которого равна 1, что $|f_n(x)| \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in S$;
2) для каждой последовательности (g_n) из $L^1[0,1]$, удовлетворяющей условию $\|g_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, выполнено $\int_0^1 f_n(t)g_n(t)\,dt \to 0$ при $n \to \infty$.