15.1. Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектр диагонального оператора в ℓ^∞.

15.2. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, f — существенно ограниченная измеримая функция на X и M_f — оператор умножения на f, действующий в $L^p(X,\mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Найдите **1)** точечный, **2)** непрерывный и **3)** остаточный спектр оператора M_f.

15.3. Найдите **1)** спектр, **2)** точечный спектр, **3)** непрерывный спектр и **4)** остаточный спектр операторов правого и левого сдвига, действующих в пространстве c_0.

15.4. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^1.

15.5. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространства ℓ^∞.

15.6. Найдите **1)** спектр, **2)** точечный спектр, **3)** непрерывный спектр и **4)** остаточный спектр оператора двустороннего сдвига в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Подсказка: можно воспользоваться тем, что тригонометрическая система тотальна в $L^2(\mathbb{T})$.

15.7*. Сделайте то же самое, что в предыдущей задаче, для пространств $\ell^p(\mathbb{Z})$ и $c_0(\mathbb{Z})$.

15.8. Для фиксированного $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор сдвига $T_\zeta \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1}z)$. Найдите его **1)** спектр, **2)** точечный спектр, **3)** непрерывный спектр и **4)** остаточный спектр.

Подсказка: см. подсказку к задаче 15.6.

Определение 15.1. *Пространство Харди* — это замкнутое подпространство в $L^2(\mathbb{T})$, определяемое следующим образом:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \,:\, \langle f, z^n\rangle = 0 \quad \forall\, n<0\}.$$

15.9. Для каждой непрерывной функции f на открытом единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и каждого $0<\rho<1$ положим

$$\|f\|_\rho = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Докажите, что определение пространства H^2, данное выше, эквивалентно следующему:

$$H^2 = \{f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ голоморфна и } \|f\| = \lim_{\rho\to 1} \|f\|_\rho < \infty\}.$$

15.10. Докажите, что оператор правого сдвига в ℓ^2 унитарно эквивалентен оператору умножения M_z в H^2. Интерпретируйте результаты о точечном, непрерывном и остаточном спектре этого оператора (см. лекцию) с точки зрения теории аналитических функций.

15.11 (*полунепрерывность спектра*). **1)** Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Докажите, что для любой окрестности $U \supset \sigma(a)$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $b \in A$, удовлетворяющего условию $\|b-a\| < \delta$, выполнено $\sigma(b) \subset U$.
2) Докажите, что спектральный радиус r на унитальной банаховой алгебре A — полунепрерывная сверху функция (т.е. для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{a \in A : r(a) < c\}$ открыто в A).

15.12. Пусть A — унитальная банахова алгебра и $B \subset A$ — подалгебра, содержащая 1_A. Докажите, что
1) $B^\times$ — открыто-замкнутое подмножество в $B \cap A^\times$;
2) для каждого $b \in B$ резольвентное множество $\rho_B(b) = \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$ открыто-замкнуто в $\rho_A(b)$;
3) для каждого $b \in B$ спектр $\sigma_B(b)$ является объединением спектра $\sigma_A(b)$ и некоторого семейства ограниченных компонент связности множества $\rho_A(b)$;
4) для каждого $b \in B$ справедливо включение $\partial\sigma_B(b) \subset \partial\sigma_A(b)$.