Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бóльшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На зачете разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 1

1. Докажите эквивалентность норм

$$\|f\| = \max\Big\{\sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|\Big\}, \quad \|f\|_0 = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

на пространстве $C^1[0,1]$.

2. Линейный оператор $T\colon C[-1,1] \to C[-1,1]$ задан формулой

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{x} f(y)\,dy - \int_{x}^{1} yf(y)\,dy.$$

1) Докажите, что T ограничен.
2) Вычислите $\|T\|$.
3) Достигает ли T нормы?

3. Пусть $X = C_b(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.
1) Докажите полноту X относительно нормы $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_1$. (*Указание*: полнотой пространств $C_b(\mathbb{R})$ и $L^1(\mathbb{R})$ пользоваться разрешается.)
2) Полно ли X относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$?

4. Пусть $H = L^2[-1,1]$ и $f(t) = e^t$. Найдите проекцию f на подпространство $H_0 \subset H$, где
1) H_0 — подпространство четных функций;
2) H_0 — подпространство многочленов степени не выше 1.

5. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Предположим, что X_0 и X/X_0 полны. Докажите, что и X полно.

6. Пусть X и Y — нормированные пространства, $X_0 \subset X$ — плотное векторное подпространство, $T_n\colon X \to Y$ — последовательность ограниченных линейных операторов. Предположим, что существует такой ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$, что $T_n x \to Tx$ для всех $x \in X_0$.
1) Докажите, что если $\sup_n \|T_n\| < \infty$, то $T_n x \to Tx$ для всех $x \in X$.
2) Верно ли предыдущее утверждение без предположения о том, что $\sup_n \|T_n\| < \infty$?

Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На зачете разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 2

1. Пространство bv состоит из всех ограниченных числовых последовательностей $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию $\sum_n |x_{n+1} - x_n| < \infty$. Докажите эквивалентность норм

$$\|x\| = \max\Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,\ \sum_n |x_{n+1} - x_n|\Big\}, \quad \|x\|_0 = |x_1| + \sum_n |x_{n+1} - x_n|$$

на пространстве bv.

2. Линейный оператор $T\colon L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ задан формулой $(Tf)(x) = f(\sqrt{x})$.
1) Докажите, что T действительно переводит $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$, и что он ограничен.
2) Вычислите $\|T\|$.
3) Достигает ли T нормы?

3. Пусть $X = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
1) Докажите полноту X относительно нормы $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$. (*Указание*: полнотой пространств $L^1(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})$ пользоваться разрешается.)
2) Полно ли X относительно нормы $\|\cdot\|_2$?

4. Пусть $H = L^2[-1,1]$ и $f(t) = \frac{1}{2-t}$. Найдите проекцию f на подпространство $H_0 \subset H$, где
1) H_0 — подпространство нечетных функций;
2) H_0 — подпространство многочленов степени не выше 1.

5. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Предположим, что X_0 и X/X_0 сепарабельны. Докажите, что и X сепарабельно.

6. Пространство c состоит из всех числовых последовательностей $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, имеющих предел при $n \to \infty$. Оно является нормированным пространством относительно нормы $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$.
1) Постройте топологический изоморфизм между c и c_0.
2) Докажите, что изометрического изоморфизма между c и c_0 не существует.