Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бóльшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На зачете разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

1. Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $C[a,b]$ при $p \neq q$?

2. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $f\colon X \to \mathbb{K}$ — существенно ограниченная измеримая функция. Зафиксируем $p \in [1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f\colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in L^p(X,\mu)).$$

1) Докажите, что M_f ограничен. 2) Вычислите его норму. 3) При каких условиях оператор M_f достигает нормы?

3. Пусть (X,μ) — пространство с мерой и $B(X)$ — пространство всех ограниченных измеримых функций на X, снабженное равномерной нормой. Постройте изометрический изоморфизм между $L^\infty(X,\mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(X)$.

4. Докажите полноту пространства $C^1[a,b]$ относительно нормы

$$\|f\| = \max\{\|f\|_\infty,\ \|f'\|_\infty\}.$$

5. Докажите, что равномерная норма на пространстве $C[a,b]$ не порождается никаким скалярным произведением.

6. Пусть $X = L^p[0,1]$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. Оператор *неопределенного интегрирования* $T\colon X \to X$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (f \in X).$$

1) Докажите, что T ограничен. 2) Для $p=1$ и $p=\infty$ вычислите его норму. 3) Для тех же p выясните, достигает ли он нормы.