А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 15

15.1. Банаховы алгебры

На прошлой лекции мы видели, что спектр элемента ассоциативной алгебры может быть любым подмножеством комплексной плоскости. Однако спектры элементов некоторых алгебр, которые «по совместительству» являются банаховыми пространствами (см. примеры 14.4 и 14.5), оказались непустыми и компактными. Наша ближайшая задача — познакомиться с понятием банаховой алгебры и понять, что компактность и непустота спектра имеют место для любого элемента любой банаховой алгебры.

Определение 15.1. *Нормированная алгебра* — это алгебра A, снабженная нормой $\|\cdot\|$, которая обладает свойством $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$ (само это свойство называется *субмультипликативностью* нормы). Если алгебра A унитальна, то дополнительно требуется, чтобы выполнялось условие $\|1_A\| = 1$. *Банахова алгебра* — это полная нормированная алгебра.

Прежде чем приводить примеры, расшифруем смысл условия субмультипликативности.

Предложение 15.1. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства. Билинейный оператор $\varphi\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда он* ограничен *в следующем смысле: существует такое $C > 0$, что $\|\varphi(x, y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения о линейных операторах (см. предложение 2.1). □

Следствие 15.2. *Умножение в нормированной алгебре непрерывно.*

Замечание 15.1. Субмультипликативность нормы и условие $\|1_A\| = 1$, входящие в определение нормированной алгебры, разумеется, не следуют из непрерывности умножения. Однако если A — алгебра, снабженная нормой, относительно которой умножение непрерывно, то на A существует эквивалентная норма, удовлетворяющая условиям определения 15.1 (см. задачу 14.2).

При рассмотрении гомоморфизмов между нормированными алгебрами разумно рассматривать только те из них, которые непрерывны (см. обсуждение в начале §2.1). Термины «топологический изоморфизм нормированных алгебр» и «изометрический изоморфизм нормированных алгебр» имеют очевидный смысл.

Очевидно, всякая подалгебра нормированной алгебры сама является нормированной алгеброй, а всякая замкнутая подалгебра банаховой алгебры — банаховой алгеброй. Кроме того, из непрерывности умножения в нормированной алгебре следует, что замыкание любой подалгебры в нормированной алгебре тоже является подалгеброй.

Посмотрим теперь на несколько основных примеров банаховых алгебр, с которыми нам предстоит работать.

Пример 15.1. Само поле $\mathbb{C}$, разумеется, является банаховой алгеброй.

Пример 15.2. Основной для нашего курса пример — это алгебра $\mathscr{B}(X)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X. Она является банаховой алгеброй относительно обычной операторной нормы (см. предложение 2.5 и теорему 4.11).

Пример 15.3. Алгебра $\ell^\infty(X)$, где X — произвольное множество, является банаховой алгеброй относительно равномерной нормы $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Пример 15.4. Пусть X — топологическое пространство. Тогда алгебра непрерывных ограниченных функций $C_b(X)$ — замкнутая подалгебра в $\ell^\infty(X)$ (см. пример 4.3) и, следовательно, является банаховой алгеброй. Подпространство $C_0(X) \subset C_b(X)$, состоящее из функций, исчезающих на бесконечности (см. пример 1.10), является банаховой алгеброй по той же причине (см. упражнение 4.1 из этих лекций). В частности, пространство $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ — банахова алгебра.

Разумеется, если X компактно, то $C(X) = C_b(X) = C_0(X)$ — банахова алгебра.

Пример 15.5. Пусть X — множество и $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Пространство $B_{\mathscr{A}}(X)$, состоящее из ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций на X, является замкнутой подалгеброй в $\ell^\infty(X)$. Следовательно, $B_{\mathscr{A}}(X)$ — банахова алгебра.

Пример 15.6. Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Мы уже отмечали выше, что пространство $L^\infty(X,\mu)$ полно (теорема 4.7) и является алгеброй относительно поточечного умножения (пример 14.5). Легко проверить (проверьте!), что норма на $L^\infty(X,\mu)$ субмультипликативна. Следовательно, $L^\infty(X,\mu)$ — банахова алгебра.

Пример 15.7. Для каждого целого $n \geqslant 0$ пространство $C^n[a,b]$ полно относительно нормы

$$\|f\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty \tag{15.1}$$

(см. задачу 4.6) и является алгеброй относительно поточечного умножения. Норма (15.1) не субмультипликативна, однако ее можно заменить на эквивалентную ей субмультипликативную норму

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!} \tag{15.2}$$

(см. задачу 14.4). Следовательно, $C^n[a,b]$ — банахова алгебра относительно нормы (15.2).

Пример 15.8. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество. Рассмотрим следующие подалгебры в $C(K)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(K) &= \overline{\bigl\{p|_K : p \text{ — многочлен}\bigr\}};\\
\mathscr{R}(K) &= \overline{\bigl\{r|_K : r \text{ — рациональная функция с полюсами вне } K\bigr\}};\\
\mathscr{A}(K) &= \bigl\{f \in C(K) : f \text{ голоморфна на } \operatorname{Int} K\bigr\}
\end{aligned}$$

(черта наверху означает замыкание в $C(K)$). Очевидно, $\mathscr{P}(K) \subset \mathscr{R}(K)$. Кроме того, нетрудно проверить, что что $\mathscr{A}(K)$ — замкнутая подалгебра в $C(K)$ (задача 14.12). Следовательно, мы имеем цепочку вложенных друг в друга замкнутых подалгебр

$$\mathscr{P}(K) \subset \mathscr{R}(K) \subset \mathscr{A}(K) \subset C(K). \tag{15.3}$$

Алгебру $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$, где $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг (диск), называют иногда *дисковой алгеброй.*

Вопрос о равенстве каких-либо алгебр в цепочке (15.3) — это, как правило, довольно тонкая задача теории аппроксимации. Некоторые примеры на эту тему содержатся в листке 14.

Еще один важный класс банаховых алгебр — так называемые *свёрточные* алгебры, ассоциированные с группами и полугруппами. Их мы обсудим позже, когда будем изучать преобразование Фурье.

Напомним (см. §14.1), что через $A^\times$ мы обозначаем мультипликативную группу всех обратимых элементов унитальной алгебры A. Если A — банахова алгебра, то группа $A^\times$ обладает рядом важных свойств, описанных в следующей теореме.

Теорема 15.3. *Пусть A — унитальная банахова алгебра.*

(i) *Если $a \in A$ и $\|a\| < 1$, то $1 - a \in A^\times$ и $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty a^n$.*
(ii) *Множество $A^\times$ открыто в A.*
(iii) *Отображение $A^\times \to A^\times$, $a \mapsto a^{-1}$, непрерывно.*

Доказательство. (i) Поскольку $\sum_{k=0}^n \|a^k\| \leqslant \sum_{k=0}^n \|a\|^k$, а алгебра A полна, мы видим, что указанный в (i) ряд сходится в A при $\|a\| < 1$ к некоторому $b \in A$. Для каждого n положим $b_n = \sum_{k=0}^n a^k$. Легко проверить, что $(1-a)b_n = b_n(1-a) = 1 - a^{n+1}$. При $n \to \infty$ получаем $(1-a)b = b(1-a) = 1$, т.е. $b = (1-a)^{-1}$, как и требовалось.

(ii) Для каждого $a \in A^\times$ отображение $L_a \colon A \to A$, $b \mapsto ab$, является гомеоморфизмом алгебры A на себя и переводит $A^\times$ в $A^\times$. В силу (i), $A^\times$ содержит окрестность единицы $U = \{b \in A : \|b - 1\| < 1\}$. Следовательно, множество $L_a(U)$ — окрестность a, содержащаяся в $A^\times$.

(iii) Проверим, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Возьмем произвольный элемент $a \in A$, удовлетворяющий условию $\|a - 1\| < 1$, и положим $b = 1 - a$. Из (i) следует, что a обратим и

$$\|a^{-1} - 1\| = \|(1-b)^{-1} - 1\| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \|b\|^n = \frac{\|b\|}{1 - \|b\|}.$$

Последнее выражение, очевидно, стремится к 0 при $b \to 0$, т.е. при $a \to 1$. Это и означает, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Остается воспользоваться следующим общим фактом.

Упражнение 15.1. Пусть G — группа, снабженная топологией, причем операция умножения $G \times G \to G$ непрерывна, а операция взятия обратного элемента $G \to G$ непрерывна в единице. Докажите, что операция взятия обратного элемента непрерывна всюду на G. $\square$

В качестве приложения установим один результат об «автоматической непрерывности». Вначале дадим следующее определение.

Определение 15.2. Пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$. Гомоморфизмы из A в $\mathbb{C}$ называются ее *характерами.*

Замечание 15.2. Заметим, что ненулевой характер унитальной алгебры унитален (поскольку он сюръективен).

Следствие 15.4. *Любой характер унитальной банаховой алгебры непрерывен, и его норма не превосходит единицы.*

Доказательство. Если характер $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ разрывен, или же если он непрерывен, но $\|\chi\| > 1$, то существует такой элемент $a \in A$, $\|a\| < 1$, что $\chi(a) = 1$. По теореме 15.3 элемент $1 - a$ обратим. Следовательно, таков же и элемент $\chi(1 - a) \in \mathbb{C}$. Но последний элемент равен нулю. Противоречие. □

Замечание 15.3. Следствие 15.4 — это простейший пример ситуации, когда непрерывность того или иного отображения между банаховыми алгебрами автоматически следует из его алгебраических свойств. Такие явления «автоматической непрерывности» (гомоморфизмов, дифференцирований, коциклов. . .) встречаются в теории банаховых алгебр довольно часто. На эту тему написано большое количество статей и несколько обширных монографий (см., например, H. G. Dales, “Banach Algebras and Automatic Continuity”, Oxford, 2000).

15.2. Спектр элемента банаховой алгебры

Наша ближайшая цель — показать, что спектр элемента любой унитальной банаховой алгебры компактен и непуст.

Теорема 15.5. *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Тогда*

(i) *$\sigma(a)$ — компактное подмножество в $\mathbb{C}$;*
(ii) *для любого $\lambda \in \sigma(a)$ имеем $|\lambda| \leqslant \|a\|$.*

Доказательство. Начнем с утверждения (ii). Если $|\lambda| > \|a\|$, то $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, поэтому элемент $1-\lambda^{-1}a$ обратим по теореме 15.3. Значит, и элемент $a-\lambda 1$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(a)$. Это доказывает (ii) и, как следствие, ограниченность спектра $\sigma(a)$. Осталось доказать его замкнутость. Для этого рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{C} \to A$, $\varphi(\lambda) = a - \lambda 1$, и заметим, что резольвентное множество $\rho(a) = \varphi^{-1}(A^\times)$ открыто ввиду непрерывности отображения φ и теоремы 15.3. Следовательно, множество $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ замкнуто, как и требовалось. □

Для доказательства непустоты спектра введем следующее понятие.

Определение 15.3. Пусть A — унитальная банахова алгебра. *Резольвентной функцией* элемента $a \in A$ называется функция $R_a\colon \rho(a) \to A$, $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$.

Лемма 15.6. *Функция R_a непрерывна на $\rho(a)$, и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$.*

Доказательство. Непрерывность функции R_a сразу следует из непрерывности взятия обратного элемента в $A^\times$ (теорема 15.3). Далее,

$$\|R_a(\lambda)\| = \|(a-\lambda 1)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\,\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\|.$$

Первый сомножитель в последнем выражении стремится к нулю при $\lambda\to\infty$, а второй — к единице в силу непрерывности взятия обратного элемента. Дальнейшее очевидно. □

Оказывается, резольвентная функция не только непрерывна, но и голоморфна в следующем смысле.

Определение 15.4. Пусть X — банахово пространство, а $U\subset\mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $\varphi\colon U\to X$ называется *голоморфной*, если для каждого $z_0\in U$ существует предел $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}$. Этот предел называется *производной* функции φ в точке z_0 и обозначается $\varphi'(z_0)$.

Замечание 15.4. Если $\varphi\colon U\to X$ — голоморфная функция, то для любого $f\in X^*$ функция $f\circ\varphi\colon U\to\mathbb{C}$ голоморфна в обычном смысле и $(f\circ\varphi)'(z)=f(\varphi'(z))$ для всех $z\in U$. Верно и обратное утверждение (т.е. из голоморфности функции $f\circ\varphi$ для всех $f\in X^*$ следует голоморфность функции φ), но оно нам не понадобится.

Предложение 15.7 (тождество Гильберта)**.** *Резольвентная функция удовлетворяет тождеству $R_a(\lambda)-R_a(\mu)=(\lambda-\mu)R_a(\lambda)R_a(\mu)$.*

Доказательство. Достаточно домножить обе части равенства на $a-\lambda 1$ и на $a-\mu 1$. □

Отсюда и из непрерывности резольвентной функции немедленно следует такой результат.

Предложение 15.8. *Резольвентная функция R_a голоморфна на $\rho(a)$, и $R_a'(z)=R_a(z)^2$ для любого $z\in\rho(a)$.*

Теорема 15.9. *Спектр любого элемента ненулевой унитальной банаховой алгебры непуст.*

Доказательство. Предположим противное; пусть $\sigma(a)=\varnothing$. Зафиксируем функционал $f\in A^*$ и положим $\varphi_f=f\circ R_a\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Из предложения 15.8, замечания 15.4 и леммы 15.6 следует, что φ_f — это целая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля $\varphi_f\equiv 0$. Поскольку функционал f произволен, отсюда и из следствия 9.5 теоремы Хана–Банаха получаем $R_a(\lambda)=0$ для всех $\lambda\in\mathbb{C}$. С другой стороны, элемент $R_a(\lambda)$ обратим. Противоречие. □

Вот одно простое, но интересное приложение.

Теорема 15.10 (Гельфанд, Мазур)**.** *Пусть A — ненулевая банахова алгебра с делением (т.е. унитальная банахова алгебра, в которой любой ненулевой элемент обратим). Тогда A изоморфна $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $a\in A$. Поскольку $\sigma(a)\neq\varnothing$, элемент $a-\lambda 1$ необратим для некоторого $\lambda\in\mathbb{C}$. Следовательно, $a-\lambda 1=0$, т.е. $a=\lambda 1$. Ввиду произвольности элемента $a\in A$ получаем $A=\mathbb{C}1$, как и требовалось. □

Замечание 15.5. Теорема Гельфанда–Мазура имеет следующую разновидность для банаховых алгебр над $\mathbb{R}$: *ненулевая банахова $\mathbb{R}$-алгебра с делением изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо телу кватернионов $\mathbb{H}$.* В такой формулировке теорема Гельфанда–Мазура обобщает классическую теорему Фробениуса о конечномерных $\mathbb{R}$-алгебрах с делением. Доказательство можно прочитать, например, в книге C. E. Rickart, “General Theory of Banach Algebras”.

15.3. Спектральный радиус

Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент.

Определение 15.5. Число $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ называется *спектральным радиусом* элемента $a \in A$.

Поскольку $\sigma(a)$ — непустой компакт в $\mathbb{C}$, спектральный радиус любого элемента определен, конечен и является радиусом наименьшего замкнутого круга с центром в нуле, содержащего $\sigma(a)$.

Наблюдение 15.11. Из теоремы 15.5 (2) следует, что $r(a) \leqslant \|a\|$.

Пример 15.9. Легко видеть, что в алгебре $A = \ell^\infty(X)$ для любого $a \in A$ справедливо равенство $r(a) = \|a\|$. То же самое верно и в любой ее спектрально инвариантной подалгебре — в частности, в алгебрах $C_b(X)$ и $B_{\mathscr{A}}(X)$ (см. пример 14.4).

В общем случае равенство $r(a) = \|a\|$ может и не выполняться:

Пример 15.10. Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$, и пусть оператор T в каком-либо базисе записывается матрицей $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\sigma(T) = \{0\}$, поэтому и $r(T) = 0$; с другой стороны, $\|T\| \neq 0$.

Докажем теперь полезную формулу, выражающую спектральный радиус в терминах нормы.

Теорема 15.12 (формула Бёрлинга)**.** *Пусть A — унитальная банахова алгебра, и пусть $a \in A$. Тогда*
$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство. Достаточно установить, что
$$r(a) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} \quad \text{и} \quad r(a) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}; \tag{15.4}$$
отсюда будет следовать как существование указанного в формулировке предела, так и его совпадение с $r(a)$.

Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ ввиду теоремы об отображении спектра. Поэтому $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$ и $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$. Взяв inf по $n \in \mathbb{N}$, а затем sup по $\lambda \in \sigma(a)$, получаем неравенство $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$.

Для доказательства второго неравенства возьмем круг $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1/r(a)\}$ (если $r(a) = 0$, то $D = \mathbb{C}$), зафиксируем функционал $f \in A^*$ и заметим, что функция
$$\psi_f(\lambda) = f\big((1 - \lambda a)^{-1}\big)$$

определена всюду на D. Напомним, что функция $\lambda \mapsto (1-\lambda a)^{-1} = -\lambda^{-1} R_a(\lambda^{-1})$ голоморфна в $D \setminus \{0\}$ и стремится к 1 при $\lambda \to 0$ (см. предложение 15.8 и теорему 15.3). Следовательно, функция ψ_f голоморфна в D (по теореме об устранимой особенности) и поэтому разлагается в ряд Тейлора: $\psi_f(\lambda) = \sum_n c_n \lambda^n$ для всех $\lambda \in D$.

Если $|\lambda| < 1/\|a\|$, то $(1-\lambda a)^{-1} = \sum_n (\lambda a)^n$ (см. теорему 15.3). Поэтому $\psi_f(\lambda) = \sum_n f(a^n)\lambda^n$ для всех таких λ. Пользуясь единственностью ряда Тейлора, заключаем, что $c_n = f(a^n)$ для всех n.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$. Поскольку ряд $\sum_n f(a^n)\lambda^n$ сходится, последовательность $\{f(a^n)\lambda^n\}$ ограничена. Но это верно для любого $f \in A^*$, поэтому из теоремы Банаха—Штейнгауза следует, что последовательность $\{\lambda^n a^n\}$ ограничена в A, т.е. $\|\lambda^n a^n\| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех n. Переписывая полученное неравенство в виде $\|a^n\|^{1/n} \leqslant C^{1/n}/|\lambda|$ и переходя к верхнему пределу, получаем $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant 1/|\lambda|$. Ввиду произвольности точки $\lambda \in D \setminus \{0\}$ отсюда следует, что $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$, как и требовалось.

Итак, оба неравенства (15.4) установлены, и теорема доказана. □

Следствие 15.13. *Для $a \in A$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\sigma(a) = \{0\}$;

(ii) $r(a) = 0$;

(iii) $\|a^n\| = o(\varepsilon^n)$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *(т.е. нормы степеней элемента a стремятся к нулю быстрее, чем любая геометрическая прогрессия).*

Определение 15.6. Элемент $a \in A$, удовлетворяющий эквивалентным условиям следствия 15.13, называется *квазинильпотентным.*

Для сравнения напомним, что элемент $a \in A$ называется *нильпотентным*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Разумеется, всякий нильпотентный элемент квазинильпотентен, однако обратное неверно. Вот классический пример.

Упражнение 15.2. Пусть $I = [a, b]$ и $K \in L^2(I \times I)$. *Интегральный оператор Вольтерра* $V_K \colon L^2(I) \to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy.$$

(i) Докажите, что если K ограничена, то V_K квазинильпотентен.

(ii)* Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

Еще одно полезное следствие формулы Бёрлинга заключается в том, что при «уменьшении» алгебры A спектральный радиус ее элемента остается прежним (напомним, что сам спектр может при этом увеличиться; см., например, задачу 14.15).

Следствие 15.14. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $B \subset A$ — замкнутая подалгебра, причем $1_A \in B$. Тогда $r_B(b) = r_A(b)$ для любого $b \in B$.*

Более точная информация о том, насколько $\sigma_B(b)$ может быть больше, чем $\sigma_A(b)$, содержится в задаче 15.12.