

17.1. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0 ?

17.2. Докажите компактность оператора вложения $C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$.

17.3. Пусть $f \in C[a, b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a, b]$. Найдите условие на f , необходимое и достаточное для компактности M_f .

17.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(X, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Найдите условие на f , необходимое и достаточное для компактности M_f .

17.5. Для интегрируемой функции f на $[0, 1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Является ли T компактным оператором

- 1) из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$?
- 2) из $L^p[0, 1]$ в $C[0, 1]$ (где $1 < p \leq \infty$)?
- 3) из $L^p[0, 1]$ в $L^p[0, 1]$ (где $1 < p \leq \infty$)?
- 4) из $L^1[0, 1]$ в $C[0, 1]$?
- 5*) из $L^1[0, 1]$ в $L^1[0, 1]$?

17.6. Пусть $I = [a, b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность *интегрального оператора* $T: C(I) \rightarrow C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy.$$

17.7. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Докажите компактность *интегрального оператора Гильберта–Шмидта* $T: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y)f(y) d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x, y) = f(x)g(y)$, где $f, g \in L^2(X, \mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leq \|K\|_2$ (см. задачу 2.12).

17.8. Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Докажите, что если T^* компактен, то и T компактен.

17.9. Пусть X — банахово пространство и $1 \leq p < \infty$. Докажите, что всякий компактный оператор $T: X \rightarrow \ell^p$ аппроксимируется конечномерными операторами.

17.10. Докажите, что образ компактного оператора $T: X \rightarrow Y$ между банаховыми пространствами X и Y не может содержать замкнутого в Y бесконечномерного подпространства.

17.11. Пусть X — банахово пространство, $x \in X$ и $f \in X^*$. Определим оператор $x \otimes f \in \mathcal{B}(X)$ формулой

$$(x \otimes f)(y) = f(y)x.$$

Найдите явную формулу для операторов **1)** $T(x \otimes f)$; **2)** $(x \otimes f)T$ (где $T \in \mathcal{B}(X)$); **3)** $(x_1 \otimes f_1)(x_2 \otimes f_2)$.

17.12. Пусть X — банахово пространство и $0 \neq I \subset \mathcal{B}(X)$ — двусторонний идеал. Докажите, что $I \supset \mathcal{F}(X)$. Как следствие, всякий ненулевой замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{B}(H)$ (где H — гильбертово пространство) содержит $\mathcal{K}(H)$. (*Анонс:* через некоторое время мы сможем доказать, что $\mathcal{K}(H)$ — единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathcal{B}(H)$).