Дифференциальные уравнения. Листок 12

Задачи 1-4 составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Определите типы особых точек системы (а) и уравнения (б). Нарисуйте фазовый портрет системы и поле направлений уравнения. Найдите все решения системы (а) и уравнения (б). Выразите решения уравнения (б) через решения системы (а)

$$\text{(а)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 3x - 4y \\ \dot{y} & = & x - 2y \end{array} \right. ; \qquad \text{(б) [см. зад. 4(3) листок 4]} \quad y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

2. Напишите и нарисуйте векторное поле, соответствующее системе дифференциальных уравнений, найдите особые точки и определите их тип:

$$\text{(а)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x^2 - 1 \\ \dot{y} & = & xy \end{array} \right. ; \qquad \text{(б) [см. зад. 3(2) листок 4]} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - y \\ \dot{y} & = & x^2 + y^2 - 2 \end{array} \right. .$$

3. Напишите векторные поля, соответствующие системам дифференциальных уравнений. Изобразите поля на фазовой плоскости. Найдите их фазовые потоки. В пунктах (а), (б), (в) нарисуйте образ единичного круга через время t, равное 1 и 2, вычислите площадь образа круга:

$$\text{(а)} \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & 0 \end{array} \right. ; \qquad \text{(б)} \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & 1 \end{array} \right. ; \qquad \text{(в)} \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x + 2y \\ \dot{y} & = & 2x + y \end{array} \right. .$$

4. В расширенном фазовом пространстве (x, t) выпрямить неавтономное векторное поле $v(t) = (x - t)\frac{\partial}{\partial x}$. Иными словами, найти такую систему координат (z, t), в которой дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = x - t$ имеет вид $\frac{dz}{dt} = 0$.

5. Выпрямить в полуплоскости $x > 0$ автономные векторные поля (т.е., найти в полуплоскости $x > 0$ координаты (u, w), в которых векторное поле v имеет вид $v = \frac{\partial}{\partial w}$). Можно ли это сделать на всей плоскости (x, y)?

$$\text{(а)} \quad y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}; \qquad \text{(б)} \quad \frac{\partial}{\partial x} + \sin x\frac{\partial}{\partial y};$$

$$\text{(в)} \quad x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}; \qquad \text{(г)} \quad x\frac{\partial}{\partial x} + (1 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

6. Определим $\sin t$ и $\cos t$ как решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дифференциального уравнения $\ddot{x} + x = 0$, с начальными условиями $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Выведите, исходя из этого определения, тригонометрические тождества $(\sin t)' = \cos t$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t$.