Дифференциальные уравнения. Листок 11

Задачи 1-4а составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Решите уравнения методом вариации постоянных

(а) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$; (б) $\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - y + \dfrac{1}{\cos t} \\ \dot{y} & = & 2x - y \end{array}\right.$;

(в) $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.

2. Найдите общее решение уравнения, подобрав частное решение в виде показательной, тригонометрической или рациональной функции.

(a) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$; (б) $y'' - y'\operatorname{tg} x + 2y = 0$.

3. Исследуйте на устойчивость нулевое решение следующих систем:

(а) $\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x^2 + y^2 - 2x \\ \dot{y} & = & 3x^2 - x + 3y \end{array}\right.$; (б) $\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} & = & \sqrt{4 - 8x} - 2e^y \end{array}\right.$.

4. (а) Докажите, что если каждое решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами стремится к нулю при $t \to +\infty$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.
   (б) Тот же вопрос для системы с переменными коэффициентами.
   (в) Докажите, что если у линейной однородной системы дифференциальных уравнений имеется неограниченное при $t \to +\infty$ решение, то ее нулевое решение неустойчиво.

5. Докажите, что отношение координат x_1/x_2 любого решения системы однородных линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a(t)x_1 + b(t)x_2 \\ \dot{x}_2 = c(t)x_1 + d(t)x_2 \end{array}\right.$$

удовлетворяет некоторому уравнению Риккати $v' + a_2(x)v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$.

6. (а) Пусть $y(x)$ - решение однородного дифференциального уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Докажите, что логарифмическая производная y удовлетворяет приведенному уравнению Риккати $v' + v^2 + a(x)v + b(x) = 0$.
   (б) Наоборот, всякое решение приведенного уравнения Рикатти $v' + v^2 + a(x)v + b(x) = 0$ есть логарифмическая производная некоторого решения соответствующего линейного уравнения.
   (в) Докажите, что общее решение всякого уравнения Рикатти может быть выписано как дробно-линейная функция параметра (произвольной постоянной)

7. Зная три частных решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ уравнения Риккати, напишите его общее решение.