Дифференциалы

Задача 1. Рассмотрим пространство матриц $n \times n$ с вещественными элементами как $\mathbb{R}^{n^2}$. Вычислите дифференциал следующих отображений.

a) транспонирование $A \to A^t$;

b) $A \to A^2$;

c) $A \to A^k$, $k > 0$;

d) $A \to \det A$ в $A = E$;

e) $A \to \det A$ в произвольной точке;

f) $A \to A^{-1}$ в $A = E$;

g) $A \to A^{-1}$ в произвольной точке.

Задача 2. В условиях Задачи 1 вычислите второй дифференциал в $A = E$ для отображений

a) $A \to A^2$;

b) $A \to A^k$, $k > 0$;

c) $A \to \det A$.

Задача 3. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_n$ многочленов одной вещественной переменной степени n со старшим коэффициентом 1. Отождествим $\mathcal{P}_n$ с $\mathbb{R}^n$, сопоставляя многочлену $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ точку $(a_{n-1}, \dots, a_0)$.

a) Вычислите дифференциал отображения $\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_{n+m}$, заданного как $(P, Q) \to PQ$.

b^*) Докажите, что дифференциал этого отображения вырожден в (P, Q) тогда и только тогда, когда у P и Q есть общий корень.

Задача 4. Укажите области, в которых следующие функции выпуклы:

a) $\sin(x + y)$;

b) $x^3 + y^3 - 3xy$;

c) x^y.

Задача 5. Найдите локальные экстремумы функций

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

b) $z = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y)$;

c) z, заданной уравнением $(x^2 + z^2 - 2)^2 + y^2 = 1$;

d^*) $z = xy$ при условии $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Задача 6. Для $p > 1$ пусть $|(x_1, \dots, x_n)|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$.

a) В каких точках эта функция дифференцируема?

b) Докажите, что функция $\sqrt[p]{x_1^p + \dots + x_n^p}$ выпукла для $x_i \geqslant 0$. Выведите отсюда, что $|(x_1, \dots, x_n)|_p$ — норма на $\mathbb{R}^n$.

c^*) Пусть p и q связаны условием $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Найдите условные экстремумы функции $|(x_1, \dots, x_n)|_p |(y_1, \dots, y_n)|_q$ при условии $x_1y_1 + \dots + x_ny_n = 1$. Выведите отсюда *неравенство Гёльдера*

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n \leqslant |(x_1, \dots, x_n)|_p |(y_1, \dots, y_n)|_q.$$

Задача 7*. Докажите *неравенство Адамара.* Пусть A — матрица с коэффициентами a_{ij}. Тогда

$$|\det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$