Самостоятельная работа 4.

Числа $a_1, \ldots, a_6$ определяется каждым студентом по формуле
$a_i =$ (остаток от деления на 7 порядкового номера в алфавите i-ой буквы фамилии) минус 3.

1) Матрица билинейной формы b в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix}.$$

а) Выписать явный вид билинейной формы $b(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ и соответсвующей ей квадратичной формы $q(x_1, x_2, x_3)$.

б) Методом Лагранжа привести квадратичную форму q к сумме квадратов.

в) Выписать базис g_1, g_2, g_3, в котором квадратичная форма q представляется в виде суммы квадратов и матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к этому базису.

г) Вычислить матрицу билинейной формы b в базисе g_1, g_2, g_3, пользуясь формулой для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса через матрицу перехода.

2) Решить ту же задачу для матрицы

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & a_4 & a_6 \\ a_4 & 0 & a_5 \\ a_6 & a_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Дан базис e_1, e_2, e_3 и три вектора $g_1 = (a_1 a_4 + a_2 a_5 + 1)e_1 + (a_4 + a_3 a_5)e_2 + a_5 e_3$, $g_2 = (a_1 + a_2 a_6)e_1 + (a_3 a_6 + 1)e_2 + a_6 e_3$, $g_3 = a_2 e_1 + a_3 e_2 + e_3$. Докажите, что g_1, g_2, g_3 образуют базис. Известно, что матрица билинейной формы b в базисе g_1, g_2, g_3 является единичной матрицей. Найти матрицу формы b в базисе e_1, e_2, e_3.

4) Положим $a = -|a_1|$, $b = 1 + |a_2|$. Докажите, что функция

$$q(f) = \int_a^b f(x) f(a + b - x)\,dx$$

является квадратичной формой на (бесконечномерном) линейном пространстве всех непрерывных вещественных функций на отрезке $[a; b]$. Выпишите соответствующую симметрическую билинейную форму. Найдите матрицу ограничения формы q на подпространство $\mathcal{P}_2$ многочленов степени не выше второй в стандартном базисе $1, x, x^2$. Методом ортогонализации стандартоного базиса найдите базис $\mathcal{P}_2$, в котором матрица этой формы диагональна.