Алгебра. Листок 10.

В этом листке все линейные пространства конечномерны, а характеристика поля отлична от 2.

◇ **10.1.** *Пусть $b(u,v)$ — билинейная форма на V. Рассмотрим отображение $f_b : V \to V^*$, сопоставляющее вектору $u \in V$ линейную функцию на V, заданную формулой $f_b(u)(v) = b(u,v)$. Докажите, что отображение f_b линейно. Зафиксируем некоторый базис в V и рассмотрим двойственный базис в V^*. Как связаны матрицы отображений f_b и f_b^* с матрицей формы b?*

◇ **10.2.** *Докажите, что в условиях предыдущей задачи форма симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда $f_b = f_b^*$ ($f_b = -f_b^*$).*

◇ **10.3.** *Пусть $K \subset V$ — ядро симметрической или кососимметрической формы b, а линейное подпространство $U \subset V$ таково, что $V = K \oplus U$. Докажите, что ограничение формы b на подпространство U невырождено.*

◇ **10.4.** *Пусть $b(u,v)$ — невырожденная билинейная форма на V, причем ее ограничение на линейное подпространство $U \subset V$ также невырождено. Рассмотрим множества $U^\perp = \{v \in V, \quad b(u,v) = 0 \ \forall \ u \in U\}$ и ${}^\perp U = \{v \in V, \quad b(v,u) = 0 \ \forall \ u \in U\}$. Докажите, что $U^\perp$ и ${}^\perp U$ являются линейными подпространствами в V, причем $V = U \oplus \ U^\perp$ и $V = U \oplus \ {}^\perp U$.*

◇ **10.5.** *а) Пусть $b(u,v)$ — симметрическая невырожденная билинейная форма на V. Подпространство $U \subset V$ называется* **изотропным**, *если ограничение формы b на U нулевое. Докажите, что $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$.*
б) Докажите, что над любым полем существует симметрическая невырожденная билинейная форма, для которой оценку предыдущего пункта нельзя улучшить.
в) Докажите, что над алгебраически замкнутым полем у любой симметрической невырожденной билинейной формы существуют изотропные подпространства размерности $\left[\frac{1}{2}\dim V\right]$.

◇ **10.6.** *Пусть $\dim V = 3$, зафиксируем в нем некоторый базис и некоторый вектор $a \in V$, $\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.*
а) Докажите, что $b_a(u,v) = \det(\hat{u}\hat{v}\hat{a})$ является кососимметрической билинейной формой на V. Найдите матрицу формы b_a. Докажите, что любая ненулевая кососимметрическая билинейная форма на V имеет вид b_a для подходящего вектора $a \in V$.
б) Рассмотрим отображение $f_{b_a} : V \to V^*$, соответствующее форме b_a из предыдущего пункта. Докажите, что его ядро одномерно, и, следовательно, представляет собой точку $p \in \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим соответствующее проективное отображение $\bar{f}_{b_a} : \mathbb{P}(V) \backslash \{p\} \to \mathbb{P}(V^*)$, сопоставляющее каждой отличной от p точке плоскости $\mathbb{P}(V)$ прямую. Дайте чисто геометрическое описание отображения $\bar{f}_{b_a}$.

◇ **10.7.** *Пусть $\dim V = 3$, рассмотрим билинейную форму b, заданную в базисе e_0, e_1, e_2 матрицей $\hat{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим отображение $f_b : V \to V^*$ и соответствующее ему проективное отображение $\bar{f}_b : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$, сопоставляющее каждой точке на плоскости $\mathbb{P}(V)$ прямую. Дайте чисто геометрическое описание отображения $\bar{f}_b$. (Это удобно сделать в аффинной карте $x_0 \neq 0$.)*

◇ **10.8.** *1) Может ли невырожденная квадратичная форма на вещественном двумерном пространстве иметь*
а) ровно одно одномерное изотропное подпространство?
б)ровно два одномерных изотропных подпространства?
в)ровно три одномерных изотропных подпространства?
2) Тот же вопрос, но форма не обязательно невырожденная.

◇ **10.9.** *Приведите пример невырожденной квадратичной формы q на трехмерном вещественном пространстве V, имеющей ненулевые изотропные векторы. Опишите в этом случае кривую на проективной плоскости $\mathbb{P}(V)$, заданую уравнением $q(v) = 0$.*

◇ **10.10.** *Пусть поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и $\dim V = 3$, рассмотрим квадратичную форму q. На проективной плоскости $\mathbb{P}(V)$ рассмотрим кривую X, заданную уравнением $q(u) = 0$.*
1) Опишите кривую X в случаях, когда ранг формы q равен 1, 2 и 3.
2) Докажите, что любая прямая на $\mathbb{P}(V)$ имеет с X либо одну, либо две общие точки.
3) Докажите, что если ранг формы q больше 1, то общая точка одна тогда и только тогда, когда ограничение формы b на соответствующее этой прямой двумерное подпространство вырождена. (При этом в случае ранга 3 эта прямая называется касательной к кривой.)

◇ **10.11.** *Приведите пример невырожденной квадратичной формы q на четырехмерном вещественном пространстве V, имеющей*
а) только одномерные изотропные подпространства.
б)двумерные изотропные подпространства.
Какая может быть в каждом из этих случаев сигнатура формы q? Опишите в каждом случае множество точек трехмерного проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, заданное уравнением $q(u) = 0$.

◇ **10.12.** *На линейном пространстве вещественных $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ задана билинейная форма $b(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$. Найдите ее ранг, сигнатуру и базис, в котором она приводится к сумме квадратов.*

◇ **10.13.** *В условиях предыдущей задачи найдите ортогонал к подпространству симметрических матриц и к подпространству верхнетреугольных матриц.*

◇ **10.14.** *Пусть в условиях задачи 10.12 билинейная форма задана формулой $b(X, Y) = \operatorname{tr} XY$. Найдите ее ранг, сигнатуру и базис, в котором она приводится к сумме квадратов.*

◇ **10.15.** *Для каждой из форм задач 10.12 и 10.14 найдите ядро и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.*

◇ **10.16.** *Докажите, что функция на пространстве вещественных 2×2 матриц, сопоставляющая матрице ее определитель, является квадратичной формой. Напишите матрицу соответствующей симметрической билинейной формы в каком-нибудь базисе. Найдите ранг и сигнатуру этой формы. Найдите ядро этой формы и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.*

◇ **10.17.** *В линейном пространстве вещественных функций $T_n = \{\sum_{m=0}^{n} a_m \cos^m x, \quad a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}\}$ задана билинейная форма $b(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(x)dx$. Найдите ее ранг и сигнатуру. Найдите функции, который получаются из базиса $1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x$ в результате применения процесса ортогонализации Грамма-Шмидта.*

◇ **10.18.** *В пространстве из задачи 10.17 форма задана формулой $b(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(\frac{\pi}{2} - x)dx$. Докажите, что эта билинейная форма симметрична и найдите ее ранг и сигнатуру.*

◇ **10.19.** *Для каждой из форм задач 10.17 и 10.18 найдите ядро и укажите какое-нибудь изотропное подпространство максимальной возможной размерности и какое-нибудь гиперболическое подпространство максимальной возможной размерности.*

◇ **10.20.** *Рассмотрим некоторый граф без петель и кратных ребер с n вершинами. Определим матрицу (a_{ij}) билинейной формы так: $a_{ii} = 2$, $i = 1 \dots n$, а при $i \neq j$ $a_{ij} = -1$ если вершины i и j соединены ребром, а остальные $a_{ij} = 0$.*
1) Докажите, что если эта форма положительно определена, то граф является деревом.
2) Приведите пример дерева, для которого эта форма не положительно определена.
*3) Придумайте бесконечное множество деревьев, для которых эта форма положительно определена. **4) Перечислите все деревья, для которых эта матрица положительно определена.*