

А. Ю. ПИРКОВСКИЙ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ЛЕКЦИЯ 8

8.1. Сопряженное пространство и сопряженный оператор

Пусть X — нормированное пространство над полем \mathbb{K} (как обычно, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}).

Определение 8.1. Нормированное пространство $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ называется *сопряженным* к X . Его элементы называются *ограниченными линейными функционалами* на X .

Из теоремы 4.11 следует, что X^* — банахово пространство (независимо от того, полно X или нет).

Конструкция «навешивания звездочки» естественна (в категорном смысле): она определена не только на пространствах, но и на операторах.

Определение 8.2. Пусть X и Y — нормированные пространства и $T: X \rightarrow Y$ — ограниченный линейный оператор. Его *сопряженным оператором* называется отображение

$$T^*: Y^* \rightarrow X^*, \quad T^*(f) = f \circ T.$$

Легко видеть, что T^* — линейный оператор.

Предложение 8.1. Пусть X и Y — нормированные пространства.

- (i) Для каждого $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ оператор $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ ограничен, и $\|T^*\| \leq \|T\|^1$.
- (ii) Если $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, то $(\lambda S + \mu T)^* = \lambda S^* + \mu T^*$.
- (iii) $(\mathbf{1}_X)^* = \mathbf{1}_{X^*}$.
- (iv) Если $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$, то $(ST)^* = T^*S^*$.

Доказательство. Для каждого $f \in Y^*$ имеем

$$\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| \leq \|f\| \|T\|.$$

Это доказывает (i). Остальные утверждения докажете сами в качестве упражнения. \square

Замечание 8.1 (для знакомых с языком категорий). Из предложения 8.1 следует, что сопоставление $X \mapsto X^*$ и $T \mapsto T^*$ представляет собой контравариантный функтор из категории \mathcal{Norm} в категорию \mathcal{Ban} (или из категории \mathcal{Norm}_1 в категорию \mathcal{Ban}_1); по поводу обозначений см. замечание 4.3.

Сопряженные пространства и сопряженные операторы играют очень важную роль в функциональном анализе. На них основана так называемая *теория двойственности* — совокупность методов и результатов, устанавливающих взаимосвязи свойств банаховых пространств и линейных операторов со свойствами их сопряженных. Через некоторое время мы увидим, что взаимосвязи эти весьма тесны. А пока для примера докажем самое простое (но важное) утверждение из теории двойственности.

¹Через некоторое время мы докажем, что на самом деле $\|T^*\| = \|T\|$.

Предложение 8.2. Пусть X и Y — нормированные пространства.

- (i) Если $T: X \rightarrow Y$ — топологический изоморфизм, то и $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ — топологический изоморфизм.
- (ii) Если $T: X \rightarrow Y$ — изометрический изоморфизм, то и $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ — изометрический изоморфизм.

Доказательство немедленно следует из следующего простого наблюдения, характеризующего топологические и изометрические изоморфизмы.

Предложение 8.3. Пусть X и Y — нормированные пространства.

- (i) Линейный оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ — топологический изоморфизм \iff существует такой линейный оператор $S \in \mathcal{B}(Y, X)$, что $ST = \mathbf{1}_X$ и $TS = \mathbf{1}_Y$.
- (ii) Линейный оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ — изометрический изоморфизм $\iff \|T\| \leq 1$, и существует такой линейный оператор $S \in \mathcal{B}(Y, X)$, что $\|S\| \leq 1$, $ST = \mathbf{1}_X$ и $TS = \mathbf{1}_Y$.

Доказательство. Утверждение (i) очевидно, а утверждение (ii) следует из (i) с учетом того, что биективный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ изометричен тогда и только тогда, когда и он, и его обратный не увеличивают норму, т.е. когда $\|T\| \leq 1$ и $\|T^{-1}\| \leq 1$. \square

Теперь, чтобы доказать предложение 8.2, остается «навесить звездочки» на T и S в предложении 8.3.

Замечание 8.2 (для знакомых с языком категорий). Предложение 8.3 утверждает попросту, что изоморфизмы в категориях \mathcal{Norm} и \mathcal{Ban} — это в точности топологические изоморфизмы, а изоморфизмы в категориях \mathcal{Norm}_1 и \mathcal{Ban}_1 — это в точности изометрические изоморфизмы (см. замечание 3.1). В свете этого предложение 8.2 становится частным случаем простейшего утверждения о том, что любой функтор переводит изоморфизмы в изоморфизмы.

Посмотрим теперь, как устроены сопряженные пространства к некоторым классическим банаховым пространствам. Начнем с гильбертовых пространств.

Пример 8.1. Пусть H — предгильбертово пространство. Каждый вектор $y \in H$ определяет линейный функционал

$$f_y: H \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_y(x) = \langle x, y \rangle.$$

Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца немедленно следует, что f_y ограничен и $\|f_y\| \leq \|y\|$. Поскольку $f_y(y) = \|y\|^2$, мы видим, что $\|f_y\| = \|y\|$.

Оказывается, если H — гильбертово пространство, то других ограниченных линейных функционалов на H , кроме описанных выше, не бывает. Прежде чем формулировать соответствующее утверждение, дадим одно определение.

Определение 8.3. Пусть X и Y — векторные пространства над \mathbb{C} . Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *антилинейным*, если

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}\varphi(x) + \bar{\mu}\varphi(y) \quad (x, y \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

Теорема 8.4 (Рисс). Пусть H — гильбертово пространство. Рассмотрим отображение $R: H \rightarrow H^*$, переводящее каждый вектор $y \in H$ в функционал f_y , действующий по правилу $f_y(x) = \langle x, y \rangle$. Тогда R антилинейно, биективно и изометрично.

Доказательство. Антилинейность отображения R очевидна, а его изометричность уже была установлена выше (см. пример 8.1). Поэтому остается доказать его сюръективность.

Пусть $f \in H^*$ — ненулевой функционал. Положим $H_0 = \text{Ker } f$. По теореме об ортогональном дополнении, $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Поскольку $\text{Im } f = \mathbb{C}$, имеем изоморфизмы векторных пространств $H_0^\perp \cong H/H_0 \cong \mathbb{C}$. Следовательно, $\dim H_0^\perp = 1$, и

$$H = H_0 \oplus \mathbb{C}y \quad (8.1)$$

для любого ненулевого $y \in H_0^\perp$. Зафиксируем такой y и покажем, что $f = \lambda f_y$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Для этого заметим, что как f , так и λf_y обращаются в нуль на H_0 для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому с учетом (8.1) нам достаточно подобрать λ так, чтобы $f(y) = \lambda f_y(y)$. А такое λ , разумеется, существует — а именно, $\lambda = f(y)/\|y\|^2$. \square

Замечание 8.3. Обратите внимание, что, хотя теорема Рисса и позволяет отождествить H и H^* , это отождествление не является изоморфизмом: оно антилинейно. Впрочем, изоморфизм между H и H^* все же существует, хотя и не канонический. Для случая сепарабельного H мы вскоре в этом убедимся.

Замечание 8.4. Полезно проследить путь, по которому мы пришли к теореме Рисса. Если H — гильбертово пространство, то из его полноты следует теорема об ортогональном дополнении, из которой, в свою очередь, следует, что

$$(\text{Ker } f)^\perp \neq 0 \quad \text{для любого } f \in H^* \setminus \{0\}. \quad (8.2)$$

Но, в сущности, именно утверждение (8.2) и использовалось в доказательстве теоремы Рисса (убедитесь!); полнота H как таковая в доказательстве не фигурировала. Если же для какого-то предгильбертова пространства H справедливо утверждение теоремы Рисса, то ясно, что H должно быть полным (почему?). Таким образом, мы видим, что для предгильбертова пространства H следующие утверждения эквивалентны:

$$\begin{aligned} H \text{ полно} &\iff \text{ для } H \text{ справедлива теорема об ортогональном дополнении} \\ &\iff \text{ для } H \text{ справедливо утверждение (8.2)} \\ &\iff \text{ для } H \text{ справедлива теорема Рисса.} \end{aligned}$$

Опишем теперь пространство, сопряженное к ℓ^p .

Предложение 8.5. Пусть числа $p, q \in (1, +\infty)$ связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$. Тогда существует изометрический изоморфизм $\ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$, переводящий каждый вектор $y \in \ell^q$ в функционал $f_y \in (\ell^p)^*$, действующий по правилу

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad (x \in \ell^p). \quad (8.3)$$

Доказательство. Из неравенства Гёльдера (см. задачу 1.1) следует, что для любых $y \in \ell^q$ и $x \in \ell^p$ ряд (8.3) абсолютно сходится, причем сумма его по модулю не превосходит $\|y\|_q \|x\|_p$. Следовательно, формула (8.3) определяет ограниченный линейный функционал f_y на ℓ^p , и $\|f_y\| \leq \|y\|_q$. Таким образом, определено линейное отображение

$$\alpha: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*, \quad \alpha(y) = f_y \quad (y \in \ell^q).$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $e_n \in \ell^p$ последовательность с единицей на n -ом месте и нулем на остальных. Тогда $f_y(e_n) = y_n$ для каждого $y \in \ell^q$, откуда следует, что $\text{Ker } \alpha = 0$. Остается доказать, что α сюръективно и изометрично.

Зафиксируем произвольный $f \in (\ell^p)^*$. Мы должны подобрать $y \in \ell^q$ так, чтобы $f = f_y$. Для этого положим $y_n = f(e_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ (никакая другая последовательность на роль y , понятно, не подойдет). Чтобы показать, что $y \in \ell^q$, для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$x_i = \begin{cases} |y_i|^q / y_i & \text{при } y_i \neq 0, \\ 0 & \text{при } y_i = 0. \end{cases}$$

Тогда для произвольного $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |y_i|^q &= \sum_{i=1}^N x_i y_i = f\left(\sum_{i=1}^N x_i e_i\right) \leq \|f\| \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{1/p} = \\ &= \|f\| \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^q\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

После сокращения получаем неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^N |y_i|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|.$$

Ввиду произвольности $N \in \mathbb{N}$ отсюда следует, что $y \in \ell^q$ и $\|y\|_q \leq \|f\|$. Поскольку линейная оболочка e_n -ых плотна в ℓ^p , а функционалы f и f_y линейны и непрерывны, из равенств $f(e_n) = f_y(e_n) = y_n$ следует, что $f = f_y$. Следовательно, α — биекция. Кроме того, $\|y\|_q \leq \|f\| = \|f_y\| \leq \|y\|_q$ (см. выше), так что α — изометрия. \square

Упражнение 8.1. Постройте изометрические изоморфизмы $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ и $(c_0)^* \cong \ell^1$.

Предостережение 8.5. Может возникнуть предположение, что пространство $(\ell^\infty)^*$ изоморфно ℓ^1 , однако это не так (см. задачу 7.8)! Чему изоморфно пространство $(\ell^\infty)^*$, мы узнаем через некоторое время.

Опишем теперь сопряженные к некоторым линейным операторам. Прежде чем это делать, договоримся о том, какие операторы следует считать «одинаковыми».

Определение 8.4. Пусть X и Y — нормированные пространства. Операторы $S \in \mathcal{B}(X)$ и $T \in \mathcal{B}(Y)$ называются *подобными* (соответственно, *изометрически эквивалентными*), если существует топологический (соответственно, изометрический) изоморфизм $U: X \rightarrow Y$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S} & X \\ U \downarrow & & \downarrow U \\ Y & \xrightarrow{T} & Y \end{array}$$

Про такой оператор U говорят, что он *осуществляет подобие* (соответственно, *изометрическую эквивалентность*) между S и T .

В случае гильбертовых пространств изометрическую эквивалентность чаще называют *унитарной эквивалентностью* (см. следствие 5.9).

Смысл этого определения в том, что операторы $S \in \mathcal{B}(X)$ и $T \in \mathcal{B}(Y)$ следует считать «одинаковыми», если пространства X и Y можно отождествить (топологически либо изометрически) так, что оператор S «превратится» в оператор T .

Предложение 8.6. Пусть числа $p, q \in (1, +\infty)$ связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$. Зафиксируем $\lambda \in \ell^\infty$ и рассмотрим следующие операторы:

$M_\lambda^{(p)}: \ell^p \rightarrow \ell^p$ — диагональный оператор (см. пример 2.2);

$T_r^{(p)}: \ell^p \rightarrow \ell^p$ — оператор правого сдвига (см. пример 2.3);

$T_\ell^{(p)}: \ell^p \rightarrow \ell^p$ — оператор левого сдвига (см. пример 2.3);

$\alpha: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$ — изометрический изоморфизм из предложения 8.5.

Тогда α осуществляет изометрическую эквивалентность между $M_\lambda^{(q)}$ и $(M_\lambda^{(p)})^*$, между $T_r^{(q)}$ и $(T_\ell^{(p)})^*$ и между $T_\ell^{(q)}$ и $(T_r^{(p)})^*$.

Доказательство. Прямая проверка (упражнение). □

А. Ю. Пирковский

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 9

Считается, что классический функциональный анализ стоит на «трех китах» — на трех фундаментальных теоремах. Это теорема Хана–Банаха, теорема Банаха об обратном операторе и теорема Банаха–Штейнгауза. Наша ближайшая цель — познакомиться с первым из этих «китов».

9.1. Теорема Хана–Банаха

Чтобы понятия сопряженного пространства и сопряженного оператора были содержательными, хотелось бы, чтобы на каждом нормированном пространстве имелось достаточно много (в каком-либо разумном смысле) ограниченных линейных функционалов. Мы уже видели, что сопряженные пространства к гильбертову пространству и к пространству ℓ^p довольно обширны. А что происходит в общем случае? Если задуматься, то совершенно непонятно, почему на произвольном нормированном пространстве вообще должны существовать ограниченные линейные функционалы (кроме нулевого). На самом деле они действительно существуют, и их «достаточно много». Это, а также многое другое, следует из теоремы Хана–Банаха, которую нам предстоит доказать.

Пусть X — векторное пространство (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Определение 9.1. Функция $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сублинейным функционалом*, если

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$;
- (ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad (x \in X, \lambda \geq 0)$.

Например, всякая полунорма является сублинейным функционалом. Отличие этих двух понятий в том, что, во-первых, сублинейный функционал (в отличие от полунормы) может принимать и отрицательные значения, а во-вторых, в условии (ii) из определения сублинейного функционала речь идет только о неотрицательных (а не о произвольных) скалярах.

Мы обсудим теорему Хана–Банаха в двух вариантах. Первый вариант относится только к векторным пространствам над \mathbb{R} .

Теорема 9.1 (Хан, Банах). Пусть X — векторное пространство над \mathbb{R} , $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию $f_0(x) \leq p(x)$ для всех $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и такой, что $f(x) \leq p(x)$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $X = X_0 \oplus \mathbb{R}y$ для некоторого $y \in X \setminus X_0$. Тогда задать линейный функционал f на X , продолжающий f_0 — это все

равно, что задать число $c = f(y)$. Пусть f — такой функционал. Мы хотим добиться того, чтобы

$$f(\pm\lambda y + x) \leq p(\pm\lambda y + x) \quad \text{для всех } \lambda > 0 \text{ и } x \in X_0. \quad (9.1)$$

Вынося λ из обеих частей неравенства и сокращая на λ , видим, что условие (9.1) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} f(\pm y + \lambda^{-1}x) &\leq p(\pm y + \lambda^{-1}x) \quad \text{для всех } \lambda > 0 \text{ и } x \in X_0 \\ \iff f(\pm y + x) &\leq p(\pm y + x) \quad \text{для всех } x \in X_0 \\ \iff \pm c + f_0(x) &\leq p(\pm y + x) \quad \text{для всех } x \in X_0 \\ \iff f_0(x) - p(-y + x) &\leq c \leq p(y + x) - f_0(x) \quad \text{для всех } x \in X_0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Итак, наша задача свелась к нахождению числа $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего (9.2). Ясно, что такое c существует тогда и только тогда, когда

$$f_0(x_1) - p(-y + x_1) \leq p(y + x_2) - f_0(x_2) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in X_0,$$

или, что эквивалентно,

$$f_0(x_1 + x_2) \leq p(y + x_2) + p(-y + x_1) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in X_0. \quad (9.3)$$

Но из условия следует, что для любых $x_1, x_2 \in X_0$ справедливы неравенства

$$f_0(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + x_2) \leq p(y + x_2) + p(-y + x_1).$$

Это доказывает (9.3), а вместе с ним и существование функционала f с требуемыми свойствами.

Общий случай сводится к предыдущему при помощи леммы Цорна. А именно, рассмотрим множество M , состоящее из пар (Z, g) , где $Z \supset X_0$ — векторное подпространство в X , а $g: Z \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный функционал, продолжающий f_0 и удовлетворяющий неравенству $g(x) \leq p(x)$ для всех $x \in Z$. Введем отношение порядка на M , полагая $(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2)$, если $Z_1 \subset Z_2$ и $g_2|_{Z_1} = g_1$. Очевидно, любое линейно упорядоченное подмножество $\{(Z_\alpha, g_\alpha)\} \subset M$ имеет верхнюю грань (Z, g) , где $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$, а функционал g однозначно определяется из условия $g|_{Z_\alpha} = g_\alpha$ для всех α . Поэтому в M есть максимальный элемент (Z, f) .

Мы утверждаем, что $Z = X$. В самом деле, если это не так, то зафиксируем $y \in X \setminus Z$ и, пользуясь уже разобранным частным случаем нашей теоремы, продолжим f до функционала h на пространстве $Z_1 = Z \oplus \mathbb{R}y$, удовлетворяющего условию $h(x) \leq p(x)$ для всех $x \in Z_1$. Но существование такого продолжения противоречит максимальнойности элемента (Z, f) в множестве M . Следовательно, $Z = X$, и f — искомый функционал. \square

В таком виде, как мы ее доказали, пользоваться теоремой Хана–Банаха не всегда удобно. Во-первых, пока не совсем понятно, какое отношение она имеет к ограниченным линейным функционалам на нормированных пространствах. А во-вторых, в ней ничего не говорится о векторных пространствах над \mathbb{C} . Чтобы сформулировать и доказать вторую разновидность теоремы Хана–Банаха, в большей степени применимую к задачам классического функционального анализа, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.2. Пусть X — векторное пространство над \mathbb{C} .

(i) *Отображение*

$$\alpha: \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R}), \quad \alpha(g) = \text{Re } g,$$

является биекцией, и обратное к нему задается формулой

$$\alpha^{-1}(f)(x) = f(x) - if(ix) \quad (x \in X).$$

(ii) Пусть $\|\cdot\|$ — полунорма на X , $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ и $\tilde{f} = \alpha^{-1}(f)$. Тогда

$$|f(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X \iff |\tilde{f}(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Доказательство. (i) Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $\text{Im } z = -\text{Re}(iz)$. Поэтому для любого $g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ имеем

$$g(x) = \text{Re } g(x) - i \text{Re } g(ix) \quad (x \in X). \quad (9.4)$$

Зафиксируем теперь $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ и рассмотрим отображение

$$\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(x) = f(x) - if(ix) \quad (x \in X).$$

Очевидно, \tilde{f} — \mathbb{R} -линейный функционал на X . Далее,

$$\tilde{f}(ix) = f(ix) + if(x) = i\tilde{f}(x),$$

откуда следует, что \tilde{f} \mathbb{C} -линеен. Ясно, наконец, что $\text{Re } \tilde{f} = f$. Отсюда и из (9.4) следует утверждение (i).

(ii) Импликация (\Leftarrow) очевидна. Для доказательства обратного утверждения зафиксируем произвольный $x \in X$ и представим $\tilde{f}(x)$ в виде $\tilde{f}(x) = re^{i\varphi}$, где $r \geq 0$. Положим $y = e^{-i\varphi}x$. Тогда $\tilde{f}(y) = r \in \mathbb{R}$, поэтому $\tilde{f}(y) = f(y)$. Отсюда

$$|\tilde{f}(x)| = r = \tilde{f}(y) = f(y) \leq \|y\| = \|x\|,$$

как и требовалось. □

Теорема 9.3 (Хан, Банах). Пусть X — векторное пространство над полем \mathbb{K} (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $\|\cdot\|$ — полунорма на X , $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию $|f_0(x)| \leq \|x\|$ для всех $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{K}$, продолжающий f_0 и такой, что $|f(x)| \leq \|x\|$ для всех $x \in X$.

Доказательство. *Случай 1:* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Из теоремы 9.1 следует, что существует линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и такой, что $f(x) \leq \|x\|$ для всех $x \in X$. Заменяя x на $-x$, получаем

$$-f(x) = f(-x) \leq \|-x\| = \|x\|,$$

откуда окончательно следует, что $-\|x\| \leq f(x) \leq \|x\|$, т.е. $|f(x)| \leq \|x\|$ для всех $x \in X$.

Случай 2: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Из уже разобранный случая 1 следует, что существует \mathbb{R} -линейный функционал $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, продолжающий $\text{Re } f_0$ и такой, что $|g(x)| \leq \|x\|$ для всех $x \in X$. Применяя лемму 9.2, видим, что функционал $f = \alpha^{-1}(g)$ — искомый. □

Выведем теперь несколько важных следствий из теоремы Хана–Банаха.

Следствие 9.4. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Тогда для любого $f_0 \in X_0^*$ существует $f \in X^*$, продолжающий f_0 и такой, что $\|f\| = \|f_0\|$.

Доказательство. Домножим норму в X на число $\|f_0\|$ и применим теорему 9.3. \square

Иначе говоря, любой ограниченный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, продолжается на все пространство с сохранением нормы. Естественно поинтересоваться: а можно ли таким же образом продолжать линейные операторы? В контексте линейной алгебры ответ утвердителен:

Упражнение 9.1. Пусть X и Y — векторные пространства (над любым полем) и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Тогда любой линейный оператор $T_0: X_0 \rightarrow Y$ продолжается до линейного оператора $T: X \rightarrow Y$.

Но в контексте функционального анализа это уже не так:

Предостережение 9.1. Если X и Y — нормированные пространства и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, то, вообще говоря, не всякий ограниченный линейный оператор $T_0: X_0 \rightarrow Y$ продолжается до ограниченного линейного оператора $T: X \rightarrow Y$.

Чтобы понять, из-за чего так происходит, сделайте задачу 8.6.

Замечание 9.2 (для знакомых с основами гомологической алгебры). Упражнение 9.1 утверждает попросту, что все векторные пространства (т.е. все модули над полем) инъективны, а предостережение 9.1 состоит в том, что в категории нормированных пространств уже не все объекты инъективны. Тем не менее, из следствия 9.4 вытекает, что основное поле \mathbb{K} — инъективное нормированное пространство. См. по этому поводу также задачи из листков 7 и 8.

Следствие 9.5. Пусть X — нормированное пространство. Тогда для любого ненулевого $x \in X$ найдется такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$.

Доказательство. Зададим функционал $f_0: \mathbb{K}x \rightarrow \mathbb{K}$ формулой $f_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$ и продолжим его на X с сохранением нормы (см. следствие 9.4). \square

Следствие 9.6. Пусть X — нормированное пространство и $x_1, x_2 \in X$ — различные векторы. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Следствие 9.6 обычно выражают фразой «ограниченные линейные функционалы разделяют точки пространства X », или «на любом нормированном пространстве имеется достаточно много ограниченных линейных функционалов».

Следствие 9.7. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $x \in X \setminus \overline{X_0}$. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$, $f|_{X_0} = 0$ и $f(x) = \rho(x, X_0)$.

Доказательство. Применим следствие 9.5 к вектору $x + \overline{X_0} \in X/\overline{X_0}$ и получим такой функционал $g \in (X/\overline{X_0})^*$, что $\|g\| = 1$ и

$$g(x + \overline{X_0}) = \|x + \overline{X_0}\|^\wedge = \rho(x, \overline{X_0}) = \rho(x, X_0).$$

Остается положить $f = g \circ Q$, где $Q: X \rightarrow X/\overline{X_0}$ — факторотображение. Равенство $\|f\| = 1$ следует тогда из коизометричности Q , а остальные требуемые свойства f очевидны. \square

Следствие 9.8. Пусть X — нормированное пространство. Для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x)|, \quad (9.5)$$

причем эта верхняя грань достигается на некотором f .

Доказательство. Это просто переформулировка следствия 9.5. \square

Теперь мы можем выполнить обещание, данное в начале лекции 8.

Следствие 9.9. Пусть $T: X \rightarrow Y$ — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами. Тогда $\|T^*\| = \|T\|$.

Доказательство. Из определения оператора T^* и равенства (9.5) получаем:

$$\|T^*\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|T^*(f)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |T^*(f)(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |f(Tx)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|. \quad \square$$

Следствие 9.10. Если $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $S \neq T$, то и $S^* \neq T^*$.

9.2. Отделение выпуклых множеств

Обсудим теперь одно важное геометрическое следствие теоремы Хана–Банаха. Прежде чем его формулировать, дадим несколько определений.

Пусть X — векторное пространство (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Определение 9.2. Непустое подмножество $S \subset X$ называется

- *выпуклым*, если для любых $x, y \in S$ отрезок $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$ содержится в S ;
- *закругленным* (или *сбалансированным*), если $\lambda S \subset S$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$;
- *абсолютно выпуклым*, если оно выпукло и закруглено;
- *поглощающим*, если для любого $x \in X$ найдется такое $C > 0$, что $x \in \lambda S$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq C$.

Замечание 9.3. Обратите внимание, что если подмножество $S \subset X$ — закругленное или поглощающее, то $0 \in S$.

Пример 9.1. Если $\|\cdot\|$ — полунорма на X , то шары

$$\mathbb{B}_{r,X} = \{x \in X : \|x\| \leq r\}, \quad \mathbb{B}_{r,X}^\circ = \{x \in X : \|x\| < r\}$$

являются абсолютно выпуклыми поглощающими множествами (проверьте!).

В дальнейшем мы будем часто использовать следующие простейшие свойства выпуклых и закругленных множеств. Их доказательство — несложное упражнение.

Предложение 9.11. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) *сумма любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;*
- (ii) *пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;*
- (iii) *образ и прообраз выпуклого множества при линейном отображении — выпуклые множества;*
- (iv) *замыкание и внутренность выпуклого множества в нормированном пространстве — выпуклые множества;*
- (v) *аналогичные утверждения справедливы для закругленных множеств.*

С каждым поглощающим множеством можно связать одну важную функцию — его функционал Минковского.

Определение 9.3. Пусть X — векторное пространство и $S \subset X$ — поглощающее множество. *Функционалом Минковского* множества S называется функция

$$p_S: X \rightarrow [0, +\infty); \quad p_S(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda S\}.$$

Перечислим простейшие свойства функционала Минковского:

Предложение 9.12. *Пусть S — поглощающее множество в векторном пространстве X . Тогда:*

- (i) $p_S(\lambda x) = \lambda p_S(x)$ для всех $x \in X$, $\lambda \geq 0$;
- (ii) *если S выпукло, то $p_S(x + y) \leq p_S(x) + p_S(y)$ для всех $x, y \in X$;*
- (iii) *если S закруглено, то $p_S(\lambda x) = |\lambda| p_S(x)$ для всех $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$;*
- (iv) *если S абсолютно выпукло, то p_S — полунорма;*
- (v) *если S выпукло, то $\{x : p_S(x) < 1\} \subset S \subset \{x : p_S(x) \leq 1\}$.*

Доказательство. Мы докажем только утверждение (ii); остальные утверждения докажете сами в качестве упражнения.

Нетрудно проверить (проверьте!), что для любого выпуклого множества S и любых $\alpha, \beta \geq 0$ справедливо равенство

$$\alpha S + \beta S = (\alpha + \beta)S. \tag{9.6}$$

Возьмем теперь $x, y \in X$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\alpha, \beta > 0$ так, чтобы

$$x \in \alpha S, \quad y \in \beta S, \quad \alpha \leq p_S(x) + \varepsilon, \quad \beta \leq p_S(y) + \varepsilon.$$

Из (9.6) заключаем, что $x + y \in (\alpha + \beta)S$, откуда

$$p_S(x + y) \leq \alpha + \beta \leq p_S(x) + p_S(y) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это завершает доказательство п. (ii). □

Пусть теперь X — нормированное пространство над \mathbb{R} .

Определение 9.4. Говорят, что множества $A, B \subset X$ *разделены гиперплоскостью* (соответственно, *строго разделены гиперплоскостью*), если существуют такие $f \in X^*$ и $c \in \mathbb{R}$, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ справедливо неравенство $f(a) \leq c \leq f(b)$ (соответственно, $f(a) < c < f(b)$).

С геометрической точки зрения это означает, что множества A и B лежат в разных замкнутых (соответственно, открытых) полупространствах, на которые гиперплоскость $\{x : f(x) = c\}$ разбивает пространство X .

Теорема 9.13. Пусть X — нормированное пространство над \mathbb{R} , и пусть $A, B \subset X$ — выпуклые непересекающиеся подмножества.

- (i) Если $\text{Int } A \neq \emptyset$, то A и B разделены гиперплоскостью.
- (ii) Если A и B открыты, то они строго разделены гиперплоскостью.
- (iii) Если A замкнуто, а B компактно, то они строго разделены гиперплоскостью.

Доказательство. (i) Поскольку $\text{Int } A \neq \emptyset$, то и $\text{Int}(B - A) \neq \emptyset$ (объясните, почему). Зафиксируем произвольный $y \in \text{Int}(B - A)$ и положим $M = A - B + y$. Из предложения 9.11 следует, что M выпукло. Далее, $0 \in \text{Int } M$ (почему?), поэтому M поглощающее. Наконец, $y \notin M$ (т.к. $A \cap B = \emptyset$), откуда $p_M(y) \geq 1$.

Рассмотрим линейный функционал $f_0: \mathbb{R}y \rightarrow \mathbb{R}$, однозначно определенный условием $f_0(y) = p_M(y)$. Ясно, что $f_0(z) \leq p_M(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}y$. Из теоремы 9.1 следует, что существует линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и удовлетворяющий условию $f(x) \leq p_M(x)$ для всех $x \in X$. В частности, $f(x) \leq 1$ для всех $x \in M$. Отсюда с учетом того, что $0 \in \text{Int } M$, следует, что f переводит некоторую окрестность нуля в ограниченное множество. Следовательно, f ограничен.

Наконец, заметим, что условие $f(x) \leq 1$ для всех $x \in M$ равносильно тому, что $f(a) - f(b) + p_M(y) \leq 1$ для всех $a \in A, b \in B$. Отсюда и из неравенства $p_M(y) \geq 1$ заключаем, что $f(a) \leq f(b)$. С учетом произвольности $a \in A$ и $b \in B$ это доказывает утверждение (i): в качестве константы $c \in \mathbb{R}$, фигурирующей в определении 9.4, можно взять, например, $\sup f(A)$.

(ii) Предположим теперь, что A и B открыты. Из п. (i) следует, что существуют такие $f \in X^*$ и $c \in \mathbb{R}$, что

$$\sup f(A) \leq c \leq \inf f(B). \quad (9.7)$$

Воспользуемся тем несложным утверждением (докажите его!), что любой ненулевой ограниченный линейный функционал — открытое отображение X на \mathbb{R} . Из него следует, что $f(A)$ и $f(B)$ — открытые подмножества \mathbb{R} , откуда с учетом (9.7) получаем строгие неравенства $f(a) < c < f(b)$ для всех $a \in A, b \in B$.

(iii) Наконец, предположим, что A замкнуто, а B компактно. Нетрудно проверить (проверьте!), что существует такое $\varepsilon > 0$, что $A \cap (B + \mathbb{B}_\varepsilon^\circ) = \emptyset$. Отсюда следует, что

$$(A + \mathbb{B}_{\varepsilon/2}^\circ) \cap (B + \mathbb{B}_{\varepsilon/2}^\circ) = \emptyset.$$

Поскольку множества $(A + \mathbb{B}_{\varepsilon/2}^\circ)$ и $(B + \mathbb{B}_{\varepsilon/2}^\circ)$ открыты и выпуклы, они строго разделены гиперплоскостью в силу п. (ii). Следовательно, A и B тем более строго разделены гиперплоскостью. \square

Упражнение 9.1*. Приведите пример нормированного пространства X и двух его замкнутых выпуклых непересекающихся подмножеств, не разделенных гиперплоскостью. (Более простой вопрос — задача 9.3 из листка.)

Замечание 9.4. Мы получили теорему 9.13 о разделении выпуклых множеств как следствие теоремы Хана–Банаха. На самом деле, если немного переформулировать п. (i) теоремы 9.13 (а именно, вместо нормированных пространств рассматривать произвольные векторные пространства, а вместо внутренней — так называемую «линейную внутренность»), то полученное утверждение окажется в сущности эквивалентным теореме Хана–Банаха. В качестве упражнения попробуйте сформулировать это утверждение, а затем вывести из него теорему Хана–Банаха.

О ряде других эквивалентных формулировок теоремы Хана–Банаха и об их приложениях можно прочитать в книге R. Holmes, “Geometric Functional Analysis and its applications” (Springer, 1975).