18.1. Что можно сказать об операторе, который компактен и фредгольмов одновременно?

18.2. Пусть $a_0, \ldots, a_n \in C[a,b]$. Докажите, что оператор

$$D\colon C^n[a,b] \to C[a,b], \quad D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

18.3. Докажите, что оператор

$$D\colon C^1(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T}), \quad D(f) = f'$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

18.4. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть M_λ — соответствующий диагональный оператор в ℓ^p или в c_0. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_λ. Вычислите его индекс.

18.5. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

18.6. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $f\colon X \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(X,\mu)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Найдите условие на f, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

18.7. Пусть X, Y — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор. Предположим, что операторы $S_1, S_2 \in \mathscr{B}(Y,X)$ таковы, что $S_1 T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$ и $TS_2 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y)$. Докажите, что
1) $S_1 - S_2 \in \mathscr{K}(Y,X)$ (единственность параметрикса по модулю компактных операторов);
2) $S_2 T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$ и $TS_1 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y)$ (односторонний параметрикс является параметриксом);
3) S_1 и S_2 фредгольмовы и $\operatorname{ind} S_1 = \operatorname{ind} S_2 = -\operatorname{ind} T$.

18.8 (*второе доказательство аддитивности индекса*)**.** Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте разложения $X = X_0 \oplus X_1$, $Y = Y_0 \oplus Y_1$ и $Z = Z_0 \oplus Z_1$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) X_0, Y_0 и Z_0 конечномерны;
2) $T(X_i) \subset Y_i$ и $S(Y_i) \subset Z_i$ ($i = 0, 1$);
3) T — изоморфизм X_1 на Y_1, а S — изоморфизм Y_1 на Z_1.

Из существования таких разложений выведите, что формулу $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу.

18.9 (*третье доказательство аддитивности индекса*)**. 1)** Пусть X, Y — векторные пространства, $X_1 \subset X$ и $Y_1 \subset Y$ — векторные подпространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор, осуществляющий изоморфизм между X_1 и Y_1. Определим линейный оператор $\widehat{T}\colon X/X_1 \to Y/Y_1$ формулой $\widehat{T}(x + X_1) = T(x) + Y_1$. Постройте изоморфизмы $\operatorname{Ker} T \cong \operatorname{Ker} \widehat{T}$ и $\operatorname{Coker} T \cong \operatorname{Coker} \widehat{T}$. Выведите отсюда, что T фредгольмов $\iff$ $\widehat{T}$ фредгольмов, и $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} \widehat{T}$.
2) Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте подпространства конечной коразмерности $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ и $Z_1 \subset Z$ так, чтобы T осуществлял изоморфизм X_1 на Y_1, а S — изоморфизм Y_1 на Z_1. Из существования таких подпространств и из п.1 выведите, что формулу $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу.

18.10. Докажите, что всякое бесконечномерное нормированное пространство можно разложить в прямую сумму двух подпространств, хотя бы одно из которых незамкнуто. Как следствие, эта прямая сумма не является топологической. (*Указание:* см. задачу 9.13).

18.11. Постройте пример нормированного пространства X и его замкнутых подпространств $X_0, X_1 \subset X$, таких, что $X = X_0 \oplus X_1$, но эта прямая сумма не является топологической. (Разумеется, X должно быть неполным — см. лекцию.)

18.12. Пусть X, Y — банаховы пространства. Докажите, что следующие свойства линейного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:

1) существует такой оператор $S \in \mathscr{B}(Y,X)$, что $TST = T$;
2) $\operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Im} T$ — дополняемые подпространства в X и Y соответственно;
3) последовательность $0 \to \operatorname{Ker} T \to X \xrightarrow{T} Y \to \operatorname{Coker} T \to 0$ обладает стягивающей гомотопией, состоящей из ограниченных операторов.

Задача будет зачтена, если будет доказана эквивалентность первых двух условий (третье условие — упражнение для любителей алгебры).

18.13. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что отображение

$$Y \otimes X^* \to \mathscr{F}(X,Y), \quad x \otimes f \mapsto f(\,\cdot\,)x \tag{1}$$

— изоморфизм векторных пространств. (Кстати, результат этой задачи оправдывает обозначения из задачи 17.11.)

Определение 18.1. Пусть X — нормированное пространство. Функционал $\operatorname{Tr}\colon \mathscr{F}(X) \to \mathbb{C}$ строится как композиция отображения $\mathscr{F}(X) \to X \otimes X^*$, обратного к (1), и спаривания

$$X \otimes X^* \to \mathbb{C}, \quad x \otimes f \mapsto f(x).$$

Этот функционал называется *следом.*

18.14. 1) Покажите, что при $\dim X < \infty$ определение 18.1 эквивалентно обычному определению следа.
2) Докажите, что для $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ и $S \in \mathscr{F}(Y,X)$ справедлива формула $\operatorname{Tr}(ST) = \operatorname{Tr}(TS)$.

18.15 (*абстрактная формула Атья–Ботта*)**.** Пусть X, Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор. Выберем ограниченный оператор $S\colon Y \to X$ так, чтобы операторы $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ были конечномерными. Докажите, что

$$\operatorname{ind} T = \operatorname{Tr}(\mathbf{1}_X - ST) - \operatorname{Tr}(\mathbf{1}_Y - TS).$$

В частности, если $X = Y$, то $\operatorname{ind} T = \operatorname{Tr}([T,S])$.

18.16 (*четвертое доказательство аддитивности индекса*)**.** Придумайте доказательство формулы $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$, основанное на результате предыдущей задачи.