Определение 8.1. Векторное подпространство X_0 нормированного пространства X называется *дополняемым*, если существует такое векторное подпространство $X_1 \subset X$, что отображение $X_0 \oplus X_1 \to X$, $(x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1$, — топологический изоморфизм.

8.1. Докажите, что дополняемое подпространство $X_0 \subset X$ замкнуто в X.

8.2. Докажите, что следующие свойства векторного подпространства $X_0 \subset X$ эквивалентны:

(1) X_0 дополняемо;

(2) X_0 является образом некоторого проектора $P \in \mathscr{B}(X)$ (т.е. оператора, удовлетворяющего условию $P^2 = P$);

(3) существует непрерывный линейный оператор $j \colon X/X_0 \to X$ такой, что $j(x + X_0) = x$ для всех $x \in X$.

8.3. Докажите, что **1)** каждое конечномерное подпространство и **2)** каждое замкнутое подпространство конечной коразмерности дополняемы.

Указание. **1)** Выберите базис в $X_0 \subset X$ и с помощью его дуального базиса постройте проектор на X_0. **2)** Воспользуйтесь п.3 предыдущей задачи.

8.4. Докажите, что все замкнутые подпространства гильбертова пространства дополняемы.

8.5. Докажите, что инъективное банахово пространство (см. листок 7) дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве.

8.6. 1) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞. **2)** Приведите пример неинъективного банахова пространства.

Указание. Можно действовать следующим образом:

1) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).

2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.

3) Докажите, что на ℓ^∞/c_0 не существует счетного множества непрерывных линейных функционалов, разделяющего точки.

4) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

Факт. *Если все замкнутые подпространства банахова пространства X дополняемы, то X топологически изоморфно гильбертову пространству* (Линденштраусс, Цафрири, 1971 г.).

8.7. Докажите, что

1) гильбертово пространство рефлексивно;
2) пространства ℓ^p $(1 < p < +\infty)$ рефлексивны;
3) пространство c_0 нерефлексивно;
4) пространство ℓ^1 нерефлексивно;
5) пространство $C[a, b]$ нерефлексивно.

8.8. Пусть X — нормированное пространство, $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Исследуйте взаимосвязь между операторами $i_{X^*} \colon X^* \to X^{***}$ и $i_X^* \colon X^{***} \to X^*$.

8.9. 1) Докажите, что если банахово пространство X топологически изоморфно Y^* для некоторого банахова пространства Y, то оно дополняемо в X^{**}.

2) Придумайте еще одно решение задачи 7.13.

8.10. 1) Докажите, что банахово пространство X рефлексивно $\iff$ X^* рефлексивно.
2) Выведите отсюда нерефлексивность ℓ^1 и ℓ^∞.

8.11. Пусть X и Y — банаховы пространства и $S \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Обязательно ли существует такой $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, что $S = T^*$?