А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ
Лекция 16

16.1. Спектры ограниченных операторов. Части спектра

От общих банаховых алгебр перейдем теперь к алгебре $\mathscr{B}(X)$ ограниченных операторов в банаховом пространстве X. Наша ближайшая задача — вычислить спектры некоторых классических операторов, обсудить несколько общих приемов вычисления спектра и попутно понять, на какие части естественно разбить спектр линейного оператора.

Предложение 16.1. *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$, $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^\infty$ и $M_\lambda \colon X \to X$ — диагональный оператор (см. пример 2.2). Тогда $\sigma(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$.*

Доказательство. Обозначим, как обычно, через e_n последовательность с единицей на n-ом месте и нулем на остальных. Очевидно, $M_\lambda e_n = \lambda_n e_n$. Отсюда с учетом замкнутости спектра следует, что $\overline{\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subset \sigma(M_\lambda)$. Для доказательства обратного включения заметим, что отображение

$$\varphi \colon \ell^\infty \to \mathscr{B}(X), \quad \varphi(\lambda) = M_\lambda,$$

является унитальным гомоморфизмом и поэтому не увеличивает спектр (предложение 14.2). Таким образом,

$$\sigma(M_\lambda) = \sigma_{\mathscr{B}(X)}(\varphi(\lambda)) \subset \sigma_{\ell^\infty}(\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

(см. пример 14.4). Это завершает доказательство. □

Полученный результат можно обобщить следующим образом.

Предложение 16.2. *Пусть (Ω, μ) — пространство с мерой*[1]*, $X = L^p(\Omega, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ и $M_f \colon X \to X$ — оператор умножения (см. пример 2.5). Тогда спектр $\sigma(M_f)$ равен множеству существенных значений функции f.*

Доказательство. Как и в предыдущем предложении, имеем унитальный гомоморфизм

$$\varphi \colon L^\infty(\Omega, \mu) \to \mathscr{B}(X), \quad \varphi(f) = M_f.$$

Напомним, что $\sigma_{L^\infty}(f)$ — это в точности множество существенных значений функции f (см. пример 14.5). Поэтому, чтобы доказать требуемое равенство, остается проверить,

[1] Как обычно, мы не предполагаем, что мера μ конечна, однако будем требовать, чтобы каждое измеримое подмножество в Ω положительной меры содержало измеримое подмножество конечной положительной меры. Этим свойством обладают все «приличные» меры — в частности, все σ-конечные меры. Если не требовать выполнения этого условия, то доказываемое утверждение перестает быть верным — приведите пример!

что гомоморфизм φ переводит необратимые элементы алгебры $L^\infty(\Omega,\mu)$ в необратимые операторы (см. предложение 14.2).

Итак, пусть $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ — необратимый элемент. Это означает в точности, что 0 — существенное значение функции f, т.е. $\mu(f^{-1}(U)) > 0$ для любой окрестности нуля $U \subset \mathbb{C}$. Для каждого $\delta > 0$ выберем измеримое подмножество $E_\delta \subset \Omega$ так, чтобы $0 < \mu(E_\delta) < \infty$ и $|f(x)| < \delta$ для всех $x \in E_\delta$. Тогда функция $\chi_\delta = \chi_{E_\delta}$ лежит в X, причем $\chi_\delta \neq 0$ в X. Нетрудно проверить (проверьте!), что $\|M_f\chi_\delta\| \leqslant \delta\|\chi_\delta\|$ (см. пример 2.5). Следовательно, оператор M_f не топологически инъективен, а значит, необратим. $\square$

Если внимательно посмотреть на разобранные выше примеры, то может возникнуть естественное желание разбить спектр оператора T на несколько частей в зависимости от того, по какой причине соответствующий оператор $T - \lambda\mathbf{1}$ необратим.

Вообще, пусть S — произвольный ограниченный оператор в банаховом пространстве X. Почему он может оказаться необратимым? Во-первых, может оказаться, что $\operatorname{Ker} S \neq 0$ (в конечномерном случае этим все и исчерпывается — инъективный оператор в конечномерном пространстве обратим). Во-вторых, возможен случай, когда $\operatorname{Ker} S = 0$, но $\operatorname{Im} S \neq X$ (приведите пример!). Его удобно разбить на два подслучая: либо $\operatorname{Im} S$ плотен в X, либо нет. В применении к оператору $S = T - \lambda\mathbf{1}$ это приводит к следующему определению.

Определение 16.1. *Точечным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(X)$ называется множество

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq 0\}.$$

Непрерывным спектром оператора T называется множество

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} = X,\ \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq X\}.$$

Наконец, *остаточным спектром* оператора T называется множество

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} \neq X\}.$$

Очевидно, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$. Заметим, что точечный спектр $\sigma_p(T)$ — это в точности множество собственных значений оператора T. Если пространство X конечномерно, то $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, а $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ пусты. Посмотрим, что происходит в бесконечномерном случае.

Предложение 16.3. *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или $X = c_0$, $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^\infty$ и $M_\lambda \colon X \to X$ — диагональный оператор (см. пример 2.2). Тогда $\sigma_p(M_\lambda) = \{\lambda_n\}$, $\sigma_c(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ и $\sigma_r(M_\lambda) = \varnothing$.*

Доказательство. Поскольку $M_\lambda e_n = \lambda_n e_n$, справедливо включение $\{\lambda_n\} \subset \sigma_p(M_\lambda)$. Пусть теперь $\mu \in \sigma(M_\lambda) \setminus \{\lambda_n\}$. Заметим, что $M_\lambda - \mu\mathbf{1} = M_\nu$, где $\nu_n = \lambda_n - \mu$. Поскольку $\nu_n \neq 0$ для всех n, оператор M_ν инъективен, т.е. $\mu \notin \sigma_p(M_\lambda)$. С другой стороны, вектор $e_n = \nu_n^{-1} M_\nu(e_n)$ лежит в $\operatorname{Im} M_\nu$ для всех n. Но линейная оболочка векторов e_n $(n \in \mathbb{N})$ плотна в X; значит, и $\operatorname{Im} M_\nu$ плотен в X, а это и означает, что $\mu \in \sigma_c(M_\lambda)$. $\square$

При вычислении спектра часто бывает полезно использовать соображения подобия:

Предложение 16.4. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Предположим, что операторы $S \in \mathscr{B}(X)$ и $T \in \mathscr{B}(Y)$ подобны (см. определение 8.4). Тогда $\sigma(S) = \sigma(T)$, $\sigma_p(S) = \sigma_p(T)$, $\sigma_c(S) = \sigma_c(T)$ и $\sigma_r(S) = \sigma_r(T)$.*

Доказательство этого предложения — простая проверка (проведите ее!).

В качестве иллюстрации вычислим спектр оператора двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$ (см. пример 2.3).

Предложение 16.5. *Пусть $T_b \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ — оператор двустороннего сдвига. Тогда $\sigma(T_b) = \mathbb{T}$.*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $f_n(z) = z^n$ ($z \in \mathbb{T}$). Как уже отмечалось в примере 7.3, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{T})$. Сопоставляя каждой функции из $L^2(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье относительно этого базиса, мы получаем унитарный изоморфизм $U \colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ (см. теорему 7.4), переводящий ортонормированный базис $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в стандартный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$. Следовательно, оператор T_b унитарно эквивалентен оператору $S = U^{-1}T_bU$ в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Так как $T_b e_n = e_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то и $Sf_n = f_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $(Sf_n)(z) = zf_n(z)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{T}$. Таким образом, оператор S действует на базисе $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ так же, как и оператор умножения M_z на координату z. Отсюда заключаем, что $S = M_z$. Применяя предложения 16.4 и 16.2 и пользуясь тем, что множество существенных значений непрерывной функции — это просто множество ее значений (см. задачу 13.4), получаем равенства $\sigma(T_b) = \sigma(M_z) = \mathbb{T}$. $\square$

Следующая серия приемов вычисления спектра основана на теории двойственности, т.е. на обсуждавшихся в лекциях 11–12 взаимосвязях между свойствами оператора и свойствами его сопряженного.

Предложение 16.6. *Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Тогда $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.*

Доказательство. Мы знаем (см. лекции 11–12), что оператор $T \in \mathscr{B}(X)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $T^* \in \mathscr{B}(X^*)$. Остается применить это утверждение к оператору $T - \lambda \mathbf{1}_X$. $\square$

Исследуем теперь соотношения между частями спектра операторов T и T^*, т.е. между их точечными, непрерывными и остаточными спектрами. Для этого напомним следующий факт, который немедленно вытекает из результатов, полученных на лекциях 11–12.

Предложение 16.7. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) $\overline{\operatorname{Im} T} = Y$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} T^* = 0$;
(ii) *если* $\overline{\operatorname{Im} T^*} = X^*$, *то* $\operatorname{Ker} T = 0$;
(iii) *если X рефлексивно, то* $\overline{\operatorname{Im} T^*} = X^*$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} T = 0$.

Применяя это предложение к оператору $T - \lambda \mathbf{1}_X$ (где $T \in \mathscr{B}(X)$), получаем следующий результат.

Предложение 16.8. *Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Тогда*

(i) $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
(ii) $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
(iii) $\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T^*)$;
(iv) $\sigma_p(T^*) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$;
(v) $\sigma_c(T^*) \subset \sigma_c(T)$;
(vi) $\sigma_r(T^*) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$.

Если же пространство X рефлексивно, то

(vii) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T^*)$;
(viii) $\sigma_r(T^*) \subset \sigma_p(T)$.

В качестве иллюстрации вычислим непрерывный, точечный и остаточный спектры операторов правого и левого сдвига.

Предложение 16.9. *Пусть $1 < p < \infty$, и пусть $T_r, T_\ell \in \mathscr{B}(\ell^p)$ — операторы правого и левого сдвига. Положим*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}, \quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Тогда

(i) $\sigma(T_r) = \sigma(T_\ell) = \overline{\mathbb{D}}$;
(ii) $\sigma_p(T_r) = \varnothing, \quad \sigma_c(T_r) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_r) = \mathbb{D}$;
(iii) $\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_\ell) = \varnothing$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$\sigma(T_r) \subset \overline{\mathbb{D}}, \quad \sigma(T_\ell) \subset \overline{\mathbb{D}}, \tag{16.1}$$

поскольку $\|T_\ell\| = \|T_r\| = 1$. Найдем теперь точечные спектры наших операторов. Заметим, что

$$T_r x = \lambda x \iff (0 = \lambda x_1) \,\&\, (x_n = \lambda x_{n+1} \ \forall n) \iff x = 0,$$

поэтому

$$\sigma_p(T_r) = \varnothing. \tag{16.2}$$

С другой стороны,

$$T_\ell x = \lambda x \iff x_{n+1} = \lambda x_n \ \forall n \iff x_n = x_1 \lambda^{n-1} \ \forall n,$$

поэтому вектор $x \neq 0$ является собственным для T_ℓ с собственным значением λ тогда и только тогда, когда последовательность (λ^{n-1}) лежит в ℓ^p, т.е. когда $|\lambda| < 1$. Следовательно,

$$\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}. \tag{16.3}$$

Пусть теперь число q таково, что $1/p + 1/q = 1$. Операторы $T_\ell, T_r \colon \ell^p \to \ell^p$ нам в дальнейшем будет удобно обозначать через $T_\ell^{(p)}$ и $T_r^{(p)}$ соответственно. Напомним (см. предложение 8.6), что $(T_\ell^{(p)})^* \cong T_r^{(q)}$ и $(T_r^{(p)})^* \cong T_\ell^{(q)}$ (здесь символ $\cong$ означает изометрическую эквивалентность). Применяя предложения 16.4 и 16.8, получаем следующую цепочку включений:

$$\mathbb{D} \overset{(16.3)}{=} \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \subset \sigma_p(T_r^{(p)}) \cup \sigma_r(T_r^{(p)}) \overset{(16.2)}{=} \sigma_r(T_r^{(p)}) \subset \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \overset{(16.3)}{=} \mathbb{D}.$$

Следовательно,

$$\sigma_r(T_r) = \mathbb{D}. \tag{16.4}$$

Из (16.1), (16.3) и (16.4) с учетом замкнутости спектра сразу следует утверждение (i). Далее, из (16.2) и (16.4) с учетом (i) следует, что

$$\sigma_c(T_r) = \mathbb{T},$$

откуда с учетом п. (vii) предложения 16.8 получаем равенство

$$\sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}. \tag{16.5}$$

Наконец, из (16.5), (16.3) и (i) получаем оставшееся равенство $\sigma_r(T_\ell) = \varnothing$. □

Полезное упражнение — доказать предложение 16.9 «в лоб», т.е. не используя соображений двойственности. Задача вполне решаемая, но, согласитесь, с двойственностью все выглядит куда проще и красивее.

Разобранные выше примеры — лишь небольшая часть в серии задач о вычислении спектров классических операторов. Несколько других важных примеров — упражнения 15.1–15.8 из листка 15; обязательно постарайтесь их сделать!