Дифференциальные уравнения. Листок 13

Задачи 1,2а-2г,3а,4а составляют необходимый минимум в этом листке.

В этом листке символом $F(a, b; c; z)$, где $c \neq 0, -1, -2, ...$ обозначается гипергеометрическая функция, представленная сходящимся при $|z| < 1$ рядом

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n>0} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)} \frac{z^n}{n!}.$$

1. Докажите, что $F(a, b+1; c; z) - F(a, b; c; z) = \frac{az}{c} F(a+1, b+1; c+1; z)$.

2. Выразите основные элементарные функции через гипергеометрические:
   (а) $(1+z)^a = F(-a, b; b; -z)$; (б) $\ln(1+z) = zF(1, 1; 2; -z)$;
   (в) $\arcsin z = zF(1/2, 1/2; 3/2; z^2)$; (г) $\operatorname{arctg} z = zF(1/2, 1; 3/2; -z^2)$;
   (д)* $e^x = \lim\limits_{a\to+\infty} F(a, b; b; z/a)$.

3. (а) Докажите, что при $c \neq 0, -1, -2, ...$ гипергеометрический ряд $F(a, b; c; z)$ сходится при $|z| < 1$ к аналитической в этой области функции, являющейся решением гипергеометрического уравнения
$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{du}{dz} - ab\,u = 0\,.$$
   (б) Считая c числом, отличным от натурального, выпишите в виде обобщенного степенного ряда решение гипергеометрического уравнения, имеющее в точке $z = 0$ показатель $1 - c$. Покажите, что это решение совпадает с функцией $z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z)$ и вместе с гипергеометрической функцией $F(a, b; c; z)$ при $c \notin \mathbb{Z}$ образует фундаментальную систему решений гипергеометрического уравнения.

4. (а) Докажите, что дифференциальное уравнение $w'' = \frac{w}{z}$ имеет решение $w_1(z)$, аналитичное во всей комплексной плоскости z. Найдите это решение в виде сходящегося степенного ряда.
   (б)* Докажите (например, понизив порядок уравнения), что это же уравнение имеет также решение вида $w_2(z) = u(z) + w_1(z)\log z$, где $u(z)$ - аналитическая функция.
   (в) Предъявите явную формулу для решения $w_2(z)$. Найдите 2 первых коэффициента разложения $u(z)$ (см. предыдущий пункт) в ряд Тэйлора по z.

5. (а) Докажите, что гипергеометрическое уравнение
$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{du}{dz} - ab\,u = 0$$
   имеет 3 регулярных особых точки на расширенной комплексной плоскости.
   (б) Найдите показатели решений во всех особых точках.
   (в)* Докажите, что всякое дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее ровно 3 регулярных особых точки a, b, c (уравнение Римана), приводится к гипергеометрическому уравнению дробно-линейной заменой независимого переменного z и заменой $u \mapsto \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l u$ зависимого переменного u.

6. (а)* Пусть $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Докажите, что интеграл
$$I_{a,b,c}(z) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$
   сходится при $|z| < 1$ и, как функция z, удовлетворяет гипергеометрическому уравнению с параметрами a, b, c. Считается, что выбрана ветвь функции $(1-tz)^{-a}$, стремящаяся к 1 при $z \to 0$
   (б)** Покажите, что
$$I_{a,b,c}(z) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z)\,.$$