

## Вопросы к коллоквиуму по алгебре.

Коллоквиум состоится на 3-4 парах в четверг, 10 марта. Каждый вопрос надо рассказать подробно, с полным доказательством, и уметь решить связанные с данной темой задачи. В билет войдут задачи из 9 и 10 листков.

- 1) Определение матрицы перехода. Формула для пересчета координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
- 2) Определение матрицы перехода. Определение матрицы линейного оператора в данном базисе. Формула для пересчета матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому.
- 3) Определение двойственного линейного пространства. Определение двойственного базиса. Формула для пересчета коэффициентов линейной функции при переходе от одного базиса к другому.
- 4) Определение сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора в двойственном базисе.
- 5) Определение билинейной формы, матрицы билинейной формы. Вычисление значения билинейной формы в координатах. Формула для пересчета матрицы билинейной формы при переходе от одного базиса к другому.
- 6) Равносильность задания билинейной формы на линейном пространстве  $V$  и линейного отображения из  $V$  в  $V^*$ . Как связаны матрицы билинейной формы и соответствующего линейного отображения?
- 7) Ядро симметрической билинейной формы. Взаимно-однозначное соответствие между симметрическими билинейными формами на линейном пространстве  $V$  с ядром  $K \subset V$  и невырожденными билинейными формами на фактор-пространстве  $V/K$ .
- 8) Определение квадратичной формы. Вычисление значения квадратичной формы в координатах. Восстановление билинейной формы по квадратичной.
- 9) Приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Лагранжа.
- 10) Приведение квадратичной формы к сумме квадратов методом Якоби.
- 11) Приведение квадратичной формы к сумме квадратов над алгебраически замкнутым полем.
- 12) Положительно определенные формы над  $\mathbb{R}$ . Невырожденность положительной формы. Определитель матрицы положительной формы. Критерий Сильвестра.
- 13) Сигнатура квадратичной формы над  $\mathbb{R}$ . Инвариантность сигнатуры ("закон инерции"). Вычисление сигнатуры с помощью главных угловых миноров матрицы формы.
- 14) Ортогонал к подпространству  $U$  (относительно невырожденной симметрической билинейной формы на линейном пространстве  $V$ ). Его размерность в конечномерном случае. Условие разложимости в прямую сумму  $V = U \oplus U^\perp$  (рассмотреть также случай, когда  $U$  — конечномерно, а  $V$  не обязательно).
- 15) Определение изотропного вектора и изотропного подпространства. Оценка размерности изотропного подпространства; ее точность в случае алгебраически замкнутого поля.
- 16) Гиперболическая форма. Теорема о разложении пространства в ортогональную прямую сумму гиперболического и изотропного.