Целые расширения коммутативных колец.

В этом листке слово «кольцо» всюду означает *коммутативное кольцо с единицей*, и все гомоморфизмы колец предполагаются переводящими единицу в единицу.

А11◇1. Опишите все целые над $\mathbb{Z}$ числа в полях **а)** $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ **б)** $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ **в)** $\mathbb{Q}[\omega]/(\omega^2+\omega+1)$ **г*)** $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, где $d\in\mathbb{Z}$ не делится на квадраты.

А11◇2. Пусть поле $\mathbb{F}\supset\mathbb{Q}$ конечномерно как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Верно ли, что:
а) $\forall\, b\in\mathbb{F}\ \ \exists\, z\in\mathbb{Z}$ такой, что число zb цело над $\mathbb{Z}$.
б) у векторного пространства $\mathbb{F}$ имеется базис над $\mathbb{Q}$, состоящий из чисел, целых над $\mathbb{Z}$.

А11◇3. Пусть модуль M над коммутативным кольцом A порождается элементами

$$m_1, m_2, \dots, m_r\,,$$

и A-линейное отображение $M\xrightarrow{\ \varphi\ }M$ переводит m_j в $\sum\limits_i m_i\cdot\varphi_{ij}$, где $(\varphi_{ij})\in\mathrm{Mat}_{r\times r}(A)$. Покажите, что **а)** $\det(\varphi_{ij})\cdot M\subset\varphi(M)$ **б)** если M точен[1], то $\mathfrak{a}\cdot M\neq M\ \forall$ идеала $\mathfrak{a}\subsetneq A$.

А11◇4. Покажите, что любое факториальное[2] кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

А11◇5. Пусть конечная группа G действует на кольце A (кольцевыми) автоморфизмами. Покажите, что A цело над подкольцом G-инвариантов $A^G=\{a\in A\mid ga=a\ \ \forall\, g\in G\}$.

А11◇6. Выясните, цело ли кольцо $B=\Bbbk[x,y]$ (где $\Bbbk$ — поле) над своим подкольцом

$$A=\left\{f\in B\,:\ \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} f=0\right\}$$

А11◇7. Выясните, цело ли кольцо непрерывных функций $B=\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2)$ над своим подкольцом

$$A=\{f\in A\mid f(1,0)=f(0,1)\}$$

А11◇8. Пусть A — нормальное[3] кольцо с полем частных $\mathbb{F}$. Покажите, что
а) произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{F}[x]$ лежит в $A[x]$ тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в $A[x]$
б) если элемент b какой-либо $\mathbb{F}$-алгебры B цел над A, то его минимальный многочлен над $\mathbb{F}$ лежит в $A[x]$.

А11◇9*. Покажите, что если фактор кольцо $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\dots,x_n]/I$ является полем, то оно конечно.

А11◇10*. Пусть $B\supset A$ — целое расширение колец. Покажите, что любой гомоморфизм $A\longrightarrow\Bbbk$ в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ продолжается до гомоморфизма $B\longrightarrow\Bbbk$.

А11◇11*. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом тоже нормально.

---

[1] т. е. $aM=0\Rightarrow a=0$ для $a\in A$

[2] напомним, что кольцо A называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент $a\in A$ является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений $a=p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_m$ в произведение неприводимых множителей $m=n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i=s_iq_i$ для некоторых обратимых $s_i\in A$; например, факториальными являются любое поле, любое кольцо главных идеалов (в частности, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$) и кольца многочленов $K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ над любым факториальным кольцом K

[3] коммутативное кольцо называется *нормальным*, если в нём нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных