

Коники на проективной плоскости

12.1. Докажите теорему Паппа.

12.2. Докажите теорему Дезарга.

12.3. Пусть $L \subset \mathbb{R}P^2$ — проективная прямая, $\varphi_L: \mathbb{R}P^2 \setminus L \rightarrow \mathbb{R}^2$ — соответствующая аффинная карта. Рассмотрим невырожденную конику $C \subset \mathbb{R}P^2$. Доказать, что кривая $\varphi_L(C)$ будет эллипсом, параболой или гиперболой, если пересечение $C \cap L$ содержит 0, 1 или 2 точки соответственно.

12.4. Докажите, что любая невырожденная коника в $\mathbb{R}P^2$ проективно эквивалентна конике C : $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, а в $\mathbb{C}P^2$ — конике $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

12.5. Пусть $C \subset \mathbb{R}P^2$ — невырожденная коника. Докажите, что множество прямых в $\mathbb{R}P^2$, касающихся коники C , образуют невырожденную конику в двойственном проективном пространстве.

12.6. Как определить двойное отношение $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$ четырех прямых $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$, принадлежащих пучку прямых в \mathbb{P}^2 ?

12.7. Пусть A, B, C, D — четыре различные точки на невырожденной конике C , E и F — еще две точки на C , отличные от четырех предыдущих. Доказать, что $[EA, EB, EC, ED] = [FA, FB, FC, FD]$. Тем самым, на невырожденной конике корректно определено двойное отношение 4-х точек.

12.8. Как определить двойное отношение четырех касательных к невырожденной конике?

12.9. Пусть на невырожденной конике C отмечены две точки X и Y . Подражая Паскалю, постройте естественное соответствие между пучком прямых через точку X и пучком прямых через точку Y . Докажите, что это соответствие сохраняет двойное отношение прямых в пучке и, следовательно, является проективным преобразованием пучков (кстати, а что это такое?)

12.10 (Штейнер). Пусть f — проективное преобразование пучка прямых через X в пучок прямых через Y . Рассмотрим множество точек $C = \{\ell \cap f(\ell) \mid \ell — прямая, проходящая через X\}$. Докажите, что C — коника. Приведите пример, когда C — вырожденная коника.

12.11. Сформулируйте теорему, двойственную теореме Штейнера.

12.12. Докажите, что через пять точек на $\mathbb{R}P^2$ проходит коника (как насчет единственности?). Сформулируйте двойственное утверждение.

12.13. Сформулируйте теорему, обратную теореме Паскаля о шести точках на конике.