Лекции по группам и алгебрам Ли – 6,7

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2$

Пусть e, f, h – стандартные образующие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, такие, что $[e,f]=h,\ [h,e]=2e,\ [h,f]=-2f$.

Предложение 1. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$.

Доказательство. В самом деле, на пространстве $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^3$ имеется невырожденная инвариантная билинейная симметрическая форма (Киллинга). Таким образом, образ $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ при гомоморфизме ad лежит в $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$. Так как присоединенное представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ точно, а алгебра Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ 3-мерна, гомоморфизм ad есть изоморфизм $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ на $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$. □

Естественным базисом в алгебре Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ являются матрицы

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операция коммутатора в этом базисе задается так:

$$[i,j]=k,\ [j,k]=i,\ [k,i]=j.$$

Изоморфизм $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ переводит этот базис в базис из *матриц Паули*:

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что коэффициенты матриц Паули – комплексные числа (а не вещественные). Это не случайно:

Предложение 2. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \not\simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда формы Киллинга алгебр Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ имеют одинаковую сигнатуру. Но это не так: форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ имеет сигнатуру $++-$, а форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ отрицательно определена. □

Конечномерные неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$

Мы видели, что симметрические степени тавтологического представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ неприводимы. Напомним, что такое представление реализуется в пространстве $S^n(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}[u,v]_n$ однородных многочленов от 2 переменных u, v степени n, причем базисные элементы алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ действуют в нем следующими операторами:

$$\rho(e) = u\frac{\partial}{\partial v},\ \rho(f) = v\frac{\partial}{\partial u},\ \rho(h) = u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}.$$

.

Теорема 1. *Всякое конечномерное неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ изоморфно некоторой симметрической степени тавтологического представления.*

Доказательство. Пусть V, ρ – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Лемма 1. *Пусть $v \in V$ – собственный вектор оператора $\rho(h)$ с собственным значением μ. Тогда вектор $\rho(e)v$ – собственный относительно $\rho(h)$ с собственным значением $\mu+2$, а вектор $\rho(f)v$ – собственный относительно $\rho(h)$ с собственным значением $\mu-2$.*

Доказательство. Имеем $\rho(h)\rho(e)v = \rho(e)\rho(h)v + \rho([h,e])v = \mu\rho(e)v + 2\rho(e)v$, что и требовалось. Аналогично для f. □

Лемма 2. *Существует собственный вектор $v \in V$ оператора $\rho(h)$, такой, что $\rho(e)v = 0$ (такие вектора называются* особыми*).*

Доказательство. Пусть λ – собственное значение оператора $\rho(h)$ с максимальной вещественной частью, и пусть v_λ – соответствующий собственный вектор. Тогда $\rho(e)v_\lambda$ – собственный вектор оператора $\rho(h)$ с собственным значением $\lambda+2$, и, следовательно, $\rho(e)v_\lambda = 0$. □

Пусть $v_\lambda \in V$ – особый вектор.

Лемма 3. *Подпространство V_λ, натянутое на вектора вида $\rho(f)^k v_\lambda$ есть подпредставление в V.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\rho(e)V_\lambda \subset V_\lambda$, $\rho(f)V_\lambda \subset V_\lambda$, $\rho(h)V_\lambda \subset V_\lambda$. Имеем $\rho(f)\rho(f)^k v_\lambda = \rho(f)^{k+1}v_\lambda \in V_\lambda$, а также по лемме 1 $\rho(h)\rho(f)^k v_\lambda = (\lambda - 2k)\rho(f)^k v_\lambda \in V_\lambda$. Докажем по индукции, что $\rho(e)\rho(f)^k v_\lambda = (k\lambda - k(k-1))\rho(f)^{k-1}v_\lambda \in V_\lambda$. В самом деле, это верно для $k=0$, так как $\rho(e)v_\lambda = 0$. Предположим, что это верно для всех $k < K$. Имеем

$$\rho(e)\rho(f)^K v_\lambda = (\rho(e)\rho(f))\rho(f)^{K-1}v_\lambda = (\rho(f)\rho(e) + \rho(h))\rho(f)^{K-1}v_\lambda =$$
$$= ((K-1)\lambda - (K-1)(K-2) + \lambda - 2(K-1))\rho(f)^{K-1}v_\lambda = (K\lambda - K(K-1))\rho(f)^{K-1}v_\lambda.$$

□

Лемма 4. *Подпространство V_λ конечномерно тогда и только тогда, когда $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Доказательство. Если подпространство V_λ конечномерно, то найдется такое k, что $\rho(f)^k v_\lambda = 0$. Пусть n таково, что $\rho(f)^n v_\lambda \neq 0$, $\rho(f)^{n+1}v_\lambda = 0$. Тогда

$$0 = \rho(e)\rho(f)^{n+1}v_\lambda = ((n+1)\lambda - n(n+1))\rho(f)^n v_\lambda,$$

откуда $\lambda = n$. □

Таким образом, всякое неприводимое представление изоморфно V_n для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Так как $\dim V_n = n+1$, то неприводимое представление данной размерности единственно с точностью до изоморфизма. Но $S^n(\mathbb{C}^2)$ тоже неприводимое представление размерности $n+1$, и, следовательно, $V_n \simeq S^n(\mathbb{C}^2)$. Теорема доказана. □

Категория $\mathcal{O}$

Все конечномерные неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (или $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-*модули*) обладают следующим свойством:

(1) Оператор $\rho(h)$ действует *полупросто*, т.е. пространство представления имеет базис из собственных веторов оператора $\rho(h)$.
(2) Оператор $\rho(e)$ действует *локально нильпотентно*, т.е. для любого вектора v существует такое натуральное число k, что $\rho(e)^k v = 0$.

Категория конечнопорожденных $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модулей с такими свойствами называется *категорией $\mathcal{O}$*.

Примером бесконечномерного объекта этой категории является *модуль Верма со старшим весом λ*: это векторное пространство с базисом $v_\lambda^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в элементы алгебры Ли действуют следующим образом:

$$\rho(e)v_\lambda^{(k)} = (k\lambda - k(k-1))v_\lambda^{(k-1)},\ \rho(f)v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k+1)},\ \rho(h)v_\lambda^{(k)} = (\lambda - 2k)v_\lambda^{(k)}.$$

Утверждение о неприводимых представлениях можно переформулировать таким образом:

Предложение 3. *Всякое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ лежит в категории $\mathcal{O}$. Всякий неприводимый объект категории $\mathcal{O}$ является фактором какого-нибудь модуля Верма. Модуль Верма приводим тогда и только тогда, когда $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, и в этом случае имеет единственный неприводимый фактор V_n.*

Лемма 5 (задача 4 листка 3). *Элемент* $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ *(называемый* элементом Казимира*) лежит в центре универсальной обертывающей алгебры* $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Доказательство. Необходимо и достаточно проверить, что $eC = Ce$, $fC = Cf$, $hC = Ch$. Проверим, что $eC = Ce$. Имеем

$$eC = e^2f + efe + \frac{1}{2}eh^2 = (efe + eh) + (fe^2 + he) + \frac{1}{2}(heh - 2eh) =$$
$$= efe + fe^2 + he + \frac{1}{2}(h^2e - 2he) = efe + fe^2 + \frac{1}{2}h^2e = Ce.$$

Остальные равенства проверяются аналогично. □

Согласно лемме Шура, центральный элемент универсальной обертывающей алгебры в каждом неприводимом представлении действует скалярным оператором.

Лемма 6. *В неприводимом представлении* V_n *имеем* $\rho(C) = \frac{n(n+2)}{2}\,\mathrm{id}$.

Доказательство. Достаточно проверить это на старшем векторе $v_n \in V_n$. Имеем

$$\rho(C)v_n = \rho(ef + fe + \frac{1}{2}h^2)v_n = \rho(h + \frac{1}{2}h^2)v_n = (n + \frac{n^2}{2}) = \frac{n(n+2)}{2}v_n.$$

□

Таким образом, в различных неприводимых представлениях оператор Казимира действует *различными* скалярами.

Теорема 2. *Всякое конечномерное представление алгебры Ли* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть V, ρ – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Пусть $V(c) \subset V$ – корневое подпространство оператора $\rho(C)$ с собственным значением $c \in \mathbb{C}$. Представление V, таким образом, есть прямая сумма некоторых $V(c)$.

Лемма 7. *Подпространство* $V(c)$ *есть подпредставление в* V. *Подпространство* $V(c) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $c = \frac{n(n+2)}{2}$ *для некоторого* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Доказательство. Подпространство $V(c)$ есть множество векторов $v \in V$, для которых существует такое k, что $(\rho(C) - c\,\mathrm{id})^k v = 0$. Так как оператор $\rho(C) - c\,\mathrm{id}$ перестановочен с $\rho(e)$, $\rho(f)$, $\rho(h)$, это пространство инвариантно относительно операторов $\rho(e)$, $\rho(f)$, $\rho(h)$. Далее, в каждом $V(c) \neq 0$ есть конечномерное неприводимое подпредставление вида V_n, следовательно, $c = \frac{n(n+2)}{2}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. □

Лемма 8. *Всякое неприводимое подпредставление в* $V(c)$ *(где* $c = \frac{n(n+2)}{2}$*) изоморфно* V_n. *Оператор Казимира на факторпредставлении* $V(c)/V_n$ *имеет единственное собственное значение, равное* $\frac{n(n+2)}{2}$.

Доказательство. Это очевидно. □

Таким образом, пространство $V(c)$ есть прямая сумма корневых подпространств оператора $\rho(h)$ с собственными значениями $n, n-2, \ldots, -n$. Аналогично лемме 1 можно показать, что оператор $\rho(e)$ переводит подпространство с собственным значением k в подпространство с собственным значением $k+2$, а оператор $\rho(f)$ переводит подпространство с собственным значением k в подпространство с собственным значением $k-2$.

Согласно Лемме 7, для доказательства теоремы достаточно разложить каждое $V(c)$ в прямую сумму неприводимых, поэтому будем считать, что $V = V(c)$.

Лемма 9. *Если оператор* $\rho(h)$ *действует на корневом пространстве с собственным значением* n *полупросто, то* V *есть прямая сумма* V_n.

Доказательство. В самом деле, каждый собственный вектор оператора $\rho(h)$ с собственным значением n порождает подпредставление $V_n \subset V$. Пусть $v_1, \ldots, v_r$ – базис в пространстве собственных векторов оператора $\rho(h)$ с собственным значением n. Тогда сумма подпредставлений в V, порожденных этими векторами, прямая: в самом деле, если бы какое-нибудь из этих подпредставлений пересекалось с суммой остальных, то пересечение было бы нетривиальным подпредставлением в V, в котором оператор $\rho(h)$ не имеет собственного значения n, что невозможно по лемме 8. Согласно той же лемме, фактор V по этой прямой сумме равен нулю. □

Таким образом, достаточно доказать, что $\rho(h)$ действует на корневом пространстве с собственным значением n полупросто. Предположим противное, тогда найдется такая пара векторов $v, v' \in V$, что $\rho(h)v = nv$, $\rho(h)v' = nv' + v$. Тогда

$$\rho(C)v' = \rho(fe + h + \frac{1}{2}h^2)v' = \frac{n(n+2)}{2}v' + (1+n)v.$$

Так как оператор $\rho(C)$ перестановочен с $\rho(e)$, $\rho(f)$, $\rho(h)$, имеем

$$\rho(C)\rho(f)^n v' = \frac{n(n+2)}{2}\rho(f)^n v' + (1+n)\rho(f)^n v.$$

С другой стороны, $\rho(f)\rho(f)^n v' = 0$ и $\rho(h)\rho(f)^n v' = -n\rho(f)^n v' + \rho(f)^n v$, следовательно,

$$\rho(C)\rho(f)^n v' = \rho(ef - h + \frac{1}{2}h^2)\rho(f)^n v' = \frac{n(n+2)}{2}\rho(f)^n v' - (1+n)\rho(f)^n v.$$

Противоречие. □

Замечание. Для доказательства полной приводимости оказалось достаточно того, что всякое конечномерное представление принадлежит категории $\mathcal{O}$.

Характеры представлений

Пусть V, ρ – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Из теоремы о полной приводимости следует, что оператор $\rho(h)$ полупрост с целыми собственными значениями. Пусть $V(m)$ – подпространство собственных векторов оператора $\rho(h)$ с собственным значением m. Сопоставим представлению V полином Лорана

$$\chi_V(q) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^n \dim V(m).$$

Определение 1. Полиномы Лорана $\chi_V(q)$ называется *характером* представления V.

Предложение 4. *Имеем* $\chi_{V\oplus W}(q) = \chi_V(q) + \chi_W(q)$ *и* $\chi_{V\otimes W}(q) = \chi_V(q)\cdot\chi_W(q)$.

Доказательство. Первое равенство очевидно, а второе следует из того, что $V(m)\otimes W(k) \subset (V\otimes W)(m+k)$. □

Предложение 5. $\chi_{V_n}(q) = q^n + q^{n-2} + \ldots + q^{-n} = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}}$.

Доказательство. В самом деле, $\dim V_n(m) = 1$, если $m = n - 2k$, $k \le n$, иначе $\dim V_n(m) = 0$. □

Заметим, что характеры неприводимых представлений образуют базис в пространстве возвратных полиномов Лорана (т.е. таких $P(q)$, что $P(q) = P(q^{-1})$). Отсюда следует следующий рецепт разложения конечномерного представления $\mathfrak{sl}_2$ на неприводимые: надо вычислить характер этого представления и разложить его по базису из $\chi_{V_n}(q)$. Коэффициенты этого разложения и есть кратности соответствующих неприводимых представлений.

Пример. (Ср. с задачей 4 листка 2.) Разложим в прямую сумму неприводимых слагаемых представление $V_2 \otimes V_2$. Имеем

$$\chi_{V_2\otimes V_2}(q) = \chi_{V_2}(q)^2 = (q^2 + 1 + q^{-2})^2 = q^4 + 2q^2 + 3 + 2q^{-2} + q^{-4} = \chi_{V_4} + \chi_{V_2} + \chi_{V_0}.$$

Отсюда $V_2 \otimes V_2 \simeq V_4 \oplus V_2 \oplus V_0$.