

Задачи по группам и алгебрам Ли – 5

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. **а)** Докажите, что связная одномерная группа Ли изоморфна либо \mathbb{R} , либо $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. **б)** Опишите все гомоморфизмы между одномерными группами Ли.
2. Является ли присоединенное представление группы **а)** $SO_3(\mathbb{R})$; **б)** $SL_2(\mathbb{C})$; **в)** U_2 неприводимым? точным?
3. **а)** Докажите, что связная компонента единицы G_0 группы Ли G является в ней нормальной подгруппой Ли. **б)** Найдите группу компонент G/G_0 для $G = O_3(\mathbb{R})$, **в)** $G = O_{2,1}(\mathbb{R})$.
4. **а)** Докажите, что нормальная дискретная подгруппа связной группы Ли содержится в ее центре. **б)** Докажите, что фундаментальная группа любой группы Ли коммутативна.
5. **а)** Докажите, что всякое неприводимое представление V_n алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ является представлением группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$. **б)** Какие из них являются представлениями группы Ли $SO_3(\mathbb{C})$?
- 6*. Докажите, что группа Ли $SO_3(\mathbb{R})$ проста как абстрактная группа.
- 7*. Найдите фундаментальную группу группы Ли **а)** SU_n ; **б)** $SO_n(\mathbb{R})$; **в)** $SL_n(\mathbb{R})$.
- 8*. Докажите, что универсальная накрывающая группы $SL_2(\mathbb{R})$ не имеет точных конечномерных представлений.
- 9*. **а)** Докажите, что любая связная компактная голоморфная группа Ли абелева. **б)** Опишите все связные компактные голоморфные группы Ли комплексной размерности 1 с точностью до изоморфизма.
- 10*. **а)** Для каждой комплексной алгебры Ли размерности не более 3 укажите какую-нибудь голоморфную группу Ли с такой алгеброй Ли. **б)** Тот же вопрос для вещественных алгебр Ли. Какие из этих алгебр Ли допускают компактные группы Ли?