16.1. Докажите, что функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда она продолжается до непрерывной функции на $[a,b]$.

16.2. Пусть (f_n) — последовательность непрерывных функций на на каком-либо множестве, равномерно сходящаяся к функции f. Докажите, что f ограничена тогда и только тогда, когда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что все f_n ограничены при $n > N$.

16.3. Пусть последовательности функций (f_n) и (g_n), определенных на каком-либо множестве, равномерно сходятся к функциям f и g соответственно. Докажите, что **1)** $\alpha f_n + \beta g_n$ равномерно сходится к $\alpha f + \beta g$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; **2)** если f и g ограничены, то $f_n g_n$ равномерно сходится к fg.

16.4. Пусть (f_n) — последовательность непрерывных функций на каком-либо подмножестве в $\mathbb{R}^n$, равномерно сходящаяся к функции f. Докажите, что f непрерывна.

16.5*. Постройте последовательность непрерывных функций f_n на отрезке, поточечно сходящуюся к функции, которая непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных (см. задачу 4 из листка 8bis).

16.6. Пусть f — непрерывная периодическая функция на прямой. Для каждого $h \neq 0$ положим

$$f_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) f дифференцируема на $\mathbb{R}$, и ее производная f' непрерывна на $\mathbb{R}$.
2) функции f_h равномерно сходятся на $\mathbb{R}$ при $h \to 0$.

16.7. Докажите, что сумма и произведение ступенчатых функций — тоже ступенчатые функции. Докажите, что для любых ступенчатых функций f, g и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения

$$\textbf{1)}\ \int_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx; \qquad \textbf{2)}\ \left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx.$$

16.8. Пусть $f, g \in C[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Докажите выполнение соотношений из предыдущей задачи, а также следующих свойств:

$$\textbf{3)}\ \min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx \leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x);$$

$$\textbf{4)}\ \text{если } f(x) \leqslant g(x) \text{ для всех } x \in [a,b], \text{ то } \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b g\,dx.$$

16.9. Пусть $f \in C[a,b]$. Докажите, что

$$\int_a^b f\,dx = f(c)(b-a)$$

для некоторой точки $c \in (a,b)$.

16.10. Пусть $f \in C[a,b]$. Докажите, что для любых $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ выполнено равенство

$$\int_\alpha^\gamma f\,dx = \int_\alpha^\beta f\,dx + \int_\beta^\gamma f\,dx.$$

16.11. Пусть $f \in C[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a,b]$ и $\int_a^b f\,dx = 0$. Докажите, что $f = 0$.

16.12 (*Метод прямоугольников*)**.** Пусть $f \in C^1[a,b]$ (т.е. f — дифференцируемая функция на $[a,b]$, производная которой непрерывна). Для каждого n разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, и рассмотрим ступенчатую функцию g_n, равную $f(t_k)$ на полуинтервале $(t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0, \dots, n-1)$. Докажите, что

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g_n(t)\,dt\Big| < M_1 \frac{(b-a)^2}{2n},$$

где $M_1 = \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

16.13 (*Метод трапеций*)**.** Пусть $f \in C^2[a,b]$ (т.е. f — дважды дифференцируемая функция на $[a,b]$, вторая производная которой непрерывна). Для каждого n разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, и рассмотрим кусочно-линейную функцию h_n, график которой над каждым отрезком разбиения $[t_k, t_{k+1}]$ представляет собой отрезок с концами $(t_k, f(t_k))$ и $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$. Докажите, что

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b h_n(t)\,dt\Big| < M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M_2 = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.