В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 1. Локальные системы групп и их гомологии

В прошлом модуле мы изучали разные группы гомологий топологических пространств: сингулярные, клеточные, симплициальные. Все они оказываются изоморфными между собой в тех случаях, когда удается все их определить. Сейчас мы изучим некоторое обобщение этих групп.

0.1. **Локальные системы.**

Определение 1. *Локальная система* групп на связном локально односвязном топологическом пространстве M — это накрытие над M, все слои которого снабжены структурой абелевой группы, причем групповые операции сохраняются при переходе к соседним слоям. А именно, если для какой-то точки $x \in M$ и точек $a, b, c \in p^{-1}(x)$ мы имеем $c = a + b$, то для любой точки x' из "координатной" окрестности точки x (то есть из окрестности, над которой накрытие превращается в прямое произведение) будет выполнено $c' = a' + b'$, где a', b', c' — точки слоя $p^{-1}(x')$, лежащие на тех же листах накрытия, что соответственно точки a, b, c; если же мы имеем $a = -b$, то будет выполнено и $a' = -b'$.

Изоморфизм локальных систем — это изоморфизм накрытий, сохраняющий групповую структуру.

Из определения сразу следует, что локальная система имеет выделенный "нулевой" лист, взаимно однозначно проектирующийся на базу.

Примеры. A. Для любой абелевой группы A (рассматриваемой как топологическое пространство с дискретной топологией) произведение $M \times A$ является локальной системой, называемой *тривиальной* локальной системой со слоем A и обозначаемой просто A.

B. Пусть $\varphi : M' \to M$ — k-листное накрытие, и A — абелева группа. Тогда на M определена локальная система $\varphi_! A$, слой которой над $x \in M$ изоморфен A^k и состоит из всевозможных A-значных функций на $\varphi^{-1}(x)$. Эта локальная система называется *прямым образом* тривиальной локальной системы со слоем A на M'

C. На множестве локальных систем над M очевидным образом определены операции прямой суммы, тензорного произведения, Hom, факторизации локальной системы по ее подсистеме, и все остальные операции, моделирующие операции в классе абелевых групп.

D. Если на M задана локальная система, то любое непрерывное отображение $f : M' \to M$ индуцирует из нее локальную систему над M' с той же группой A. Особенно часто встречается *ограничение* локальной системы на подпространство $M' \subset M$: это частный случай индуцирования, когда отображение f — тождественное вложение.

E. Пусть M — многообразие. *Ориентирующей локальной системой* (или ориентирующим пучком) на M называется локальная система, слой которой изоморфен $\mathbf{Z}$, а непрерывное поднятие любого замкнутого пути из M на любой ненулевой лист соответствующего накрытия является замкнутым путем тогда и только тогда, когда вдоль этого пути не нарушается ориентация многообразия M; в противном случае такой путь поднимается в разомкнутый путь, концы которого (конечно, лежащие в одном слое накрытия) противоположны друг другу.

В терминах предыдущих примеров, эта локальная система является фактором прямого образа тривиальной $\mathbf{Z}$-системы, определенной на двулистном ориентирующем накрытии нашего многообразия, по (диагонально вложенной в этот прямой образ) тривиальной $\mathbf{Z}$-системе.

Вообще, любому (не обязательно касательному) векторному расслоению над произвольным пространством M соответствует его ориентирующий пучок со слоем $\mathbf{Z}$. Он изоморфен тривиальному тогда и только тогда, когда расслоение ориентируемо.

Всякая локальная система над M со слоем A определяет представление $\pi_1(M) \to \mathrm{Aut}(A)$: каждая петля задает перестановку точек прообраза отмеченной точки, и эта перестановка обязана быть автоморфизмом группы A. Классификация (с точностью до изоморфизма) локальных систем над линейно связным пространством M совпадает с классификацией таких представлений с точностью до сопряжения.

В частности, любое представление произвольной группы π в $\mathrm{Aut}(A)$ определяет единственную (с точностью до изоморфизма) локальную систему на пространстве $K(\pi, 1)$.

0.2. **Гомологии локальных систем.** С любой локальной системой $\varphi : L \to M$ связан цепной комплекс $C_*(M, L)$. Группа $C_i(M, L)$ порождена всевозможными формальными суммами сингулярных симплексов в пространстве накрытия L. Чтобы получить $C_i(M, L)$, абелеву группу всех таких формальных сумм надо профакторизовать по следующему набору соотношений: если для двух сингулярных симплексов $\alpha : \Delta^i \to L$ и $\beta : \Delta^i \to L$ их проекции $\varphi \circ \alpha$ и $\varphi \circ \beta$ совпадают (то есть являются одним и тем же сингулярным симплексом в M), то формальная сумма $\alpha + \beta$ отождествляется с третьим сингулярным симплексом $\gamma : \Delta^i \to L$, также имеющим точно ту же проекцию в M и переводящим любую точку $z \in \Delta^i$ в точку $\alpha(z) + \beta(z)$. В частности, любой симплекс, лежащий в нулевом листе, отождествляется с нулевой сингулярной цепью.

Для таких формальных сумм очевидным образом определяются границы (лежащие в $C_{i-1}(M, L)$). Гомологии получающегося цепного комплекса называются *гомологиями M с коэффициентами в локальной системе* L (или, короче, гомологиями системы L).

Двойственная конструкция определяет группы когомологий системы L.

Кроме того, как обычно, можно определять цепные и коцепные комплексы при помощи конечных и локально конечных цепей. Локально конечная цепь с коэффициентами в L — это цепь, которую можно задать формальной суммой (быть может, бесконечного числа) сингулярных симплексов в пространстве накрытия L так, что для любой точки из M есть окрестность, полный прообраз которой в пространстве накрытия пересекается только с конечным числом образов этих симплексов. Эти “локально конечные” группы гомологий обозначаются $\bar{H}_*(M, L)$ или $\bar{H}_*^{lf}(M, L)$. Конечно, для компактного M конечность и локальная конечность эквивалентны.

Примеры. A. Гомологии и когомологии M с коэффициентами в тривиальной локальной системе со слоем A — это то же самое, что обычные гомологии и когомологии с коэффициентами в группе A. Действительно, сингулярный симплекс в M с коэффициентом $a \in A$ можно рассматривать как симплекс в листе $M \times \{a\}$.

B. Для любой группы π и любого представления $\pi \to \mathrm{Aut}(A)$ группа (ко)гомологий пространства $K(\pi, 1)$ с коэффициентами в этом представлении называется группой (ко)гомологий группы π с коэффициентами в этом представлении. (Для этой группы есть и другие, более абстрактные определения).

C. Для любого k-мерного векторного расслоения $E \to B$ имеют место *изоморфизмы Тома*

$$H_i(E, E_0; \mathbf{Z}) \simeq H_{i-k}(B, \mathrm{Or(E)}),$$
$$H_i(E, E_0; \mathrm{Or(E)}) \simeq H_{i-k}(B, \mathbf{Z}),$$

где E_0 — пространство расслоения E с выброшенным нулевым сечением, а $\mathrm{Or(E)}$ в первом случае ориентирующий пучок расслоения E, а во втором — его поднятие на E (то есть локальная система, индуцированная из нее проекцией $E \to B$).

0.3. **Двойственность Пуанкаре для гомологий локальных систем.** Пусть G — одна из групп $\mathbf{Z}, \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, $A \sim G^k$ — свободный G-модуль, и L — локальная система на M со слоем A. Определим двойственную локальную систему $L^\vee$ на M как локальную систему со слоями, изоморфными $A^* \equiv \mathrm{Hom}(A, G)$, причем ее слой над точкой $x \in M$ — это по определению группа гомоморфизмов в G из слоя исходной системы L над той же точкой x. Представление $\pi_1 \to \mathrm{Aut}(A^*)$, заданное локальной системой $L^\vee$, сопряжено к представлению в $\mathrm{Aut}(A)$, заданному системой L.

Теорема 1 (двойственности Пуанкаре)**.** *Для любого ориентированного n-мерного многообразия M и произвольной локальной системы L со слоем G^k, имеется канонический изоморфизм*

$$H^i(M, L) \simeq \bar{H}_{n-i}(M, L^\vee).$$

В частности, имеется невырожденное спаривание

$$H_i(M, L) \otimes \bar{H}_{n-i}(M, L^\vee) \to \mathbf{Z}.$$

Аналогично случаю гомологий постоянных локальных систем, оно задается индексами пересечения; его посредством G-свободные части групп $H_i(M, L)$ и $\bar{H}_{n-i}(M, L^\vee)$ оказываются взаимно двойственными.

Для неориентированных многообразий имеется аналогичная формула, при этом одну (любую) из локальных систем L или $L^\vee$ надо дополнительно тензорно умножить на $\mathrm{Or}(M)$.