В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 4. Род Шварца

Определение 1. *Пусть есть произвольное отображение $f : Y \to X$, для которого $X = f(Y)$. Род $g(f)$ этого отображения определяется как минимальная мощность покрытия множества X открытыми множествами $A_1, \dots, A_k$, для которых над любым из A_i существует непрерывное сечение отображения f.*

Например, если отображение $f : S^1 \to S^1$ — диффеоморфизм, то род отображения f равен 1. Если $f : S^1 \to S^1$ — двулистное накрытие, то род f равен 2. Для n-листного ($n \geq 2$) накрытия $f : S^1 \to S^1$ род тоже равен 2.

Чаще всего род используется для расслоений. Для этого случая род введен А.С.Шварцем в конце 1950-х гг., а только что приведенное обобщение принадлежит С.Смейлу, который переоткрыл это определение около 1985 г.

Есть несколько способов, позволяющих вычислять или хотя бы оценивать род.

Способ 1. Этот способ годится для произвольных сюръективных отображений $f : Y \to X$. Для отображения f можно определить когомологическую длину $l(f)$. Отображение f индуцирует отображение $f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$. Рассмотрим подкольцо $\mathrm{Ker}\,(f^*) \subset H^*(X)$ и найдем в нем максимальное число элементов положительной размерности, произведение которых не равно нулю. Это и есть $l(f)$.

Теорема 1. $g(f) > l(f)$.

Доказательство (С.Смейл). Допустим, что найдутся k элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathrm{Ker}\, f^*$ таких, что

$$\gamma_1 \smile \cdots \smile \gamma_k \neq 0, \tag{1}$$

и открытое покрытие пространства Y k открытыми областями $V_1, \dots, V_k$ такое, что на каждом V_i существует сечение отображения f. Для каждого $i = 1, \dots, k$ рассмотрим точную последовательность пары

$$\cdots \to H^*(Y, V_i) \xrightarrow{J_i} H^*(Y) \xrightarrow{I_i} H^*(V_i) \to \dots$$

По определению сечения, для всякого i имеем $I_i(\gamma_i) = \sigma_i^* f^*(\gamma_i) = 0$. В силу точности последовательности, это значит, что имеется элемент $\alpha_i \in H^*(Y, V_i)$ такой, что $\gamma_i = J_i(\alpha)$. Докажем, что это приводит к противоречию. Для наглядности сначала рассмотрим случай, когда Y – гладкое многообразие и все области V_i – подмногообразия с гладкими краями. В этом случае по двойственности Пуанкаре в многообразии с краем $Y \setminus V_i$ элемент α_i (а следовательно и элемент γ) можно представить (индексом пересечения с) некоторым циклом $A_i \subset Y \setminus \bar{V}_i$. Когомологическое произведение (1) при переходе к двойственным объектам реализуется пересечением всех циклов A_i (если нужно, приведенных в общее положение друг с другом). Но по построению ни одна точка этого пересечения не лежит ни в одном из множеств V_i, покрывающих Y. Это дает искомое противоречие. В общем случае, когда Y – не обязательно многообразие, все это также можно сделать на языке высокой премудрости, без обращения к двойственности Пуанкаре. А именно, по определению произведение всех элементов $\alpha_i \in H^*(Y, V_i)$ есть элемент кольца $H^*(Y, \cup_i V_i) \equiv H^*(Y, Y) = 0$. С другой стороны, в силу функториальности когомологического умножения произведение (1) должно получаться из произведения элементов α_i при отображении приведения $H^*(Y, \cup_i V_i) \to H^*(Y)$, чего, конечно, не может быть. Теорема доказана.

Способ 2. Этот способ годится для локально тривиальных расслоений. Пусть $f : Y \to X$ — локально тривиальное расслоение. Тогда род этого отображения можно точно вычислить в терминах некоторых ассоциированных расслоений.

С расслоением f можно связать его k-ю степень $f^{(*k)}$. Слой расслоения $f^{(*k)}$ над точкой $y \in Y$ устроен следующим образом. Возьмем k экземпляров слоя $f^{-1}(y)$. Их джойн $f^{-1}(y) * \cdots * f^{-1}(y)$ — это и есть слой.

При взятии джойна младшие гомотопические группы упрощаются. Например, джойн любых k пространств – $(k-2)$-связное множество. Соответственно, препятствия к построению сечения для расслоения $f^{(*k)}$ в некотором смысле слабее, чем для исходного расслоения. Например, первый характеристический класс этого расслоения лежит во все более высокомерной группе гомологий Y с некоторыми коэффициентами.

Теорема 2. *Род расслоения f не превосходит k тогда и только тогда, когда расслоение $f^{(*k)}$ имеет непрерывное сечение.*

При $k = 1$ это утверждение совпадает с определением рода: расслоение имеет сечение тогда и только тогда, когда его род не превосходит 1.

Докажем теперь требуемое утверждение в общем случае. Предположим сначала, что род расслоения f не превосходит k, т.е. существует покрытие базы k областями V_i, над которыми можно построить сечения. Требуется построить сечение расслоения со слоем $F_1 * \cdots F_k$, где $F_i \simeq F = f^{-1}(y)$. Рассмотрим разбиение единицы на Y, подчиненное покрытию $\{V_i\}$. Иными словами, рассмотрим на Y функции φ_i, сумма которых равна 1, причем функция φ_i тождественно равна нулю вне V_i. По этому разбиению единицы и по заданной системе сечений исходного расслоения над множествами V_i мы построим требуемое сечение расслоения $f^{(*k)}$. Возьмем точку $y \in Y$. Для нее определены значения $\varphi_i(y)$ и в тех случаях, когда $\varphi_i(y) \neq 0$ (т.е. $y \in V_i$), над точкой y определены сечения.

Слой $F_1 * \cdots F_k$ представляет собой объединение симплексов с вершинами в $F_1, \ldots, F_k$. Точке y можно однозначно сопоставить выпуклую линейную комбинацию вершин одного из таких симплексов, а выпуклая комбинация вершин является точкой симплекса. В результате получаем требуемое сечение.

Предположим теперь, что расслоение $f^{(*k)}$ имеет сечение. Требуется покрыть базу k множествами и над каждым множеством построить сечение. Слой расслоения $f^{(*k)}$ представляет собой джойн k множеств. Его можно покрыть k открытыми множествами: выбираем k способами один экземпляр $F_i \simeq F$ и выбрасываем то, что натянуто на оставшиеся $k-1$ экземпляр.

У нас есть сечение расслоения $f^{(*k)}$ и мы получили покрытие пространства этого расслоения k открытыми множествами. Скажем, что точка базы принадлежит множеству V_i, если образ сечения над ней лежит в i-м рассматриваемом множестве, т.е. не лежит в грани, в которую не входит F_i.

Сечение над множеством V_i строится так. Над этим множеством у нас есть сечение расслоения $f^{(*k)}$, причем оно не попадает на грань, в которую не входит F_i. Тогда соответствующую точку симплекса с вершинами $F_1, \ldots, F_k$ можно сдвинуть в вершину F_i.