

В. А. Васильев

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТОПОЛОГИИ

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 6. Оценка рода главного накрытия. Род и категория. Приложения

1. Гомологическая оценка рода главного накрытия. Сейчас мы приведем еще одну нижнюю оценку рода расслоения, применимую уже в совсем специальной ситуации: для *главных накрытий*, то есть для главных расслоений с дискретной группой. Конечно, с любым главным расслоением канонически связано некоторое главное накрытие, группа которого — это группа связных компонент исходной группы. Род этого накрытия очевидно оценивает снизу род исходного расслоения.

Итак, пусть G — дискретная группа и $f : Y \rightarrow X$ — главное G -накрытие. Тогда можно определить кохомологический род этого накрытия. Наше накрытие $f : Y \rightarrow X$ индуцируется из универсального накрытия над пространством $BG \equiv K(G, 1)$ посредством отображения $cl : X \rightarrow BG$, которое определено с точностью до гомотопии. Поэтому однозначно определено отображение $cl^* : H^*(BG, T) \rightarrow H^*(X, T)$, где T — произвольный G -модуль (или, что то же самое, произвольная локальная система групп на BG).

Кохомологический T -род накрытия f определяется следующим образом. Может случиться, что кохомологии пространства X конечномерны, то есть начиная с какой-то размерности все отображения $cl^i : H^i(BG, T) \rightarrow H^i(X, T)$ нулевые. Возьмем наименьшее число j , для которого $cl^i : H^i(BG, T) \rightarrow H^i(X, T)$ является тривиальным оператором при всех $i \geq j$. Это и есть кохомологический род $h_T(f)$.

Теорема 1. Для любого G -модуля T выполняется неравенство $g(f) \geq h_T(f)$.

Эта оценка тесно связана с оценкой из теоремы 2 лекции 4. Действительно, вспомним что классифицирующее пространство $BG = K(G, 1)$ можно построить с помощью джойнов. (Мы берем джойн N экземпляров группы G . Очевидное действие G на себе (например, левыми) сдвигами канонически продолжается до эффективного действия G на этом джойне. Тогда отображение факторизации $G^{*N} \rightarrow G^{*N}/G$ является главным G -расслоением. При этом G^{*N} стандартно вложено в $G^{*(N+1)}$, а G^{*N}/G в $G^{*(N+1)}/G$. Объединение этих расслоений и является искомым универсальным расслоением.) Так вот, если род исходного главного расслоения $f : Y \rightarrow X$ не превосходит k , то классифицирующее отображение $cl : X \rightarrow BG$ гомотопно отображению, образ которого лежит в подмножестве G^{*k}/G .

2. Категория Люстерника-Шнирельмана и расслоение Серра. Вот один очень важный частный случай рода расслоения.

Пусть X — линейно связное хаусдорфово топологическое пространство. Категорией пространства X называют число $\text{cat } X$, равное минимальному из чисел i , для которых существует покрытие пространства X стягиваемыми по X в точку множествами $A_1, \dots, A_i$. Множества A_j либо предполагаются все замкнутыми (так было в исходном определении Люстерника–Шнирельмана), либо их считают открытыми.

Если $X = S^n$, то $\text{cat } X = 2$ при любом определении.

Если есть пара (X, A) , то можно определить $\text{cat}_X A$, рассматривая покрытия A множествами, стягиваемыми в X .

Категория особенно полезна при изучении пространств петель и при изучении замкнутых геодезических на римановых многообразиях.

Теорема 2 (свойства категории). 1) Если $X = M^n$, то $\text{cat } X \leq n + 1$.

2) Если $X = M^n$ — компактное многообразие без края, а $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция, то число критических точек f не меньше чем $\text{cat } M$. Здесь идет речь о произвольных критических точках, не обязательно невырожденных.

3) для любого коммутативного кольца P , $\text{cat } X$ больше соответствующей кохомологической длины $l_P(X)$ пространства X , то есть максимального числа элементов положительной размерности в кольце $H^*(X, g)$, кохомологическое произведение которых не равно нулю.

Например, кохомологическая длина $X = \mathbf{R}P^n$ равна n . Кохомологическая длина тора T^n тоже равна n . Таким образом, категория этих многообразий в точности равна $n + 1$. Это — редкие примеры, когда категорию можно точно вычислить. Обычно можно получить лишь какие-то оценки.

Свойство (2) доказывается индукцией по перестройкам множеств $X_t = f^{-1}(-\infty, t]$ при прохождении через изолированные критические точки.

Категория является частным случаем рода. Действительно, с каждым линейно связным пространством X связано пространство путей LX , то есть пространство непрерывных отображений $[0, 1] \rightarrow X$, переводящих 0 в отмеченную точку $x_0 \in X$. Это пространство снабжается обычной “открыто-компактной” топологией. База этой топологии состоит из множеств $U(K, O)$, где K — компактное подмножество в $[0, 1]$, O — открытое подмножество в X , а $U(K, O)$ — множество всевозможных отображений, переводящих K внутрь O . В случае, если X — метрическое пространство, можно вместо этого определения взять просто C^0 -топологию.

Очевидно, имеется отображение $LX \rightarrow X$, сопоставляющее любому пути его конец. Оно называется *расслоением Серра*. Это отображение непрерывно в нашей топологии. Расслоением в обычном смысле оно может не быть, но для него выполняется свойство накрывающей гомотопии, а следовательно и все стандартные теоремы, которые в курсе гомотопической топологии доказываются для локально тривиальных расслоений. Теперь заметим, что стягиваемость в X подмножества $K \subset X$ — это в точности наличие у этого “расслоения” сечения над K : каждой точке $x \in K$ ставится в соответствие некоторый путь, по которому эта точка утягивается в отмеченную, причем все эти пути непрерывно зависят от x . Легко видеть, что пространство LX стягиваемо, поэтому отображение в кохомологиях, индуцированное проекцией $LX \rightarrow X$, является нулевым во всех положительных размерностях. В частности, последнее утверждение теоремы 2 — частный случай теоремы 1 из лекции 4.

3. Приложения к теории сложности вычислений. Пусть есть какая-то вычислительная задача. Алгоритм для решения этой задачи — это ориентированный граф, у которого есть вершины с названиями четырех видов.

ВХОД. На вход подаются числа $a_1, \dots, a_k$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ БЛОК. В арифметических блоках производятся арифметические операции.

ВЕТВЛЕНИЕ. Значение какого-то числа сравнивается с нулем и в зависимости от результата управление передается в одном из двух направлений.

ВЫХОД. Каждая цепочка заканчивается выходом.

Граф должен быть расположен так, что каждый раз управление передается строго вниз. В частности, при данном определении алгоритма циклы недопустимы.

Пусть есть какая-то вычислительная задача. Топологической сложностью алгоритма, решающего эту задачу называется число ветвлений в нем. А топологической сложностью задачи — минимум таких чисел по всем решающим ее алгоритмам.

Вот модельная конкретная задача: решение системы алгебраических уравнений. Начнем с одного уравнения $x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_d = 0$. Будем считать, что $a_i \in \mathbb{C}$ и $|a_i| \leq 1$.

На вход подается $2d$ вещественных чисел (вещественные и мнимые части коэффициентов). На выходе надо получить либо 2 числа (если ищем один корень), либо $2d$ вещественных чисел (если ищем все корни). Назовем алгоритм ε -хорошим, если корни вычислены с точностью до ε (и при выполнении алгоритма ни для какого набора начальных данных не встретится деления на нуль). В случае поиска всех корней имеется в виду, что корни можно упорядочить так, что они будут отличаться от вычисленных чисел не более чем на ε .

Теорема 3. *Для любого простого p и достаточно малого ε*

- a) топологическая сложность задачи вычисления всех корней с точностью до ε не меньше чем $d - D_p(d)$, где $D_p(d)$ – число цифр в p -ичном разложении числа d ;*
- b) топологическая сложность задачи вычисления одного корня с точностью до ε не меньше уменьшенной на 1 максимальной степени числа p , делящей d .*
- c) топологические сложности обеих этих задач не превосходят $d - 1$.*

В частности, если d — степень простого числа, то все эти оценки равны $d - 1$ и мы получаем точное вычисление топологической сложности для таких d .

Основа для этой теоремы – следующее замечание С.Смейла. Рассмотрим $d!$ -листное накрытие, база которого — множество всех неупорядоченных наборов из d попарно различных точек в $\mathbb{C}^1$, а слой над такой точкой состоит из всевозможных упорядоченных наборов, получающихся из этого неупорядоченного.

Предложение 1. *Топологическая сложность задачи вычисления всех корней многочленов степени d не меньше, чем уменьшенный на 1 род только что описанного накрытия.*

Действительно, число ветвлений древовидного алгоритма — это в точности уменьшенное на 1 число его выходов. Но если у нас есть алгоритм с g выходами, решающий нашу задачу, то ему ставится в соответствие конструкция, очень похожая на ту, что участвует в определении рода. А именно, любому выходу алгоритма можно поставить в соответствие множество таких начальных данных, что если мы подадим их на вход, то выйдем именно через этот выход. Эти множества должны покрывать все множество начальных данных, а результат действия алгоритма для каждого из этих множеств является “почти сечением” нашего накрытия: слово “почти” определяется тем, что корни вычисляются не точно, а приближенно. Это небольшое несоответствие (а также то, что получающееся покрытие не обязано оказаться открытым, вопреки определению рода) легко преодолеваются, и задача сводится прямо к определению рода.

Аналогичное неравенство связывает топологическую сложность задачи вычисления одного корня и род d -листного накрытия с той же базой, точка слоя которого над неупорядоченным набором чисел — это тот же набор, в котором выделен один из его элементов.

Остается оценить род этих накрытий. Конечно, это гораздо более сложная задача, использующая все описанные выше приемы для вычисления рода. Все просто в случае $d = 2$: тогда это просто род двулистного накрытия окружности. В случае задачи про вычисление всех корней также есть несложная оценка топологической сложности числом $[d/2]$ (всего лишь примерно в 2 раза более слабая, чем данная в теореме 3). Действительно, для этой оценки надо пристально посмотреть на то, что происходит с нашим накрытием в окрестности полинома, имеющего $[d/2]$ разных двукратных корней...