

В. А. Васильев
 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТОПОЛОГИИ
 Весенний семестр 2011 г.

Лекция 8. Спектральная последовательность расслоения

1. Функториальность спектральной последовательности фильтрованного пространства. Пусть X и Y — два фильтрованных пространства с фильтрациями $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N = X$ и $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_N = Y$. Пусть имеется отображение $f : X \rightarrow Y$, уважающее эти фильтрации, то есть $f(X_i) \subset Y_i$ для всякого i . Тогда автоматически возникает гомоморфизм соответствующих спектральных последовательностей, то есть для любого $r \geq 0$ система гомоморфизмов $E_{p,q}^r(X) \rightarrow E_{p,q}^r(Y)$, коммутирующих с дифференциалами ∂_r . Очень полезно при этом следующее обстоятельство: если для некоторого r этот гомоморфизм $f_r : E^r(X) \rightarrow E^r(Y)$ оказывается изоморфизмом, то автоматически являются изоморфизмами и все последующие гомоморфизмы $f_s, s > r$. В частности, отсюда следует¹ изоморфизм градуированной группы

$$(1) \quad \bigoplus_{p=0}^N H_i^{(p)}(X) / H_i^{(p-1)}(X)$$

и аналогичной группы для Y , а это влечет и изоморфность самих групп $H_*(X)$ и $H_*(Y)$.

2. Спектральная последовательность, связанная с произвольным фильтрованным комплексом. Пусть дан абстрактный комплекс

$$\dots \rightarrow C_{i+1} \rightarrow C_i \rightarrow C_{i-1} \rightarrow \dots,$$

снабженный конечной фильтрацией (то есть каждая из абелевых групп C_i профильтрована подгруппами $C_i^{(0)} \subset \dots \subset C_i^{(N)} \equiv C_i$, причем $\partial(C_i^{(p)}) \subset C_{i-1}^{(p)}$ для любых i, p). Тогда точно как и выше определяется спектральная последовательность, порожденная этой фильтрацией и сходящаяся к группам (1) для каждого i .

3. Спектральная последовательность расслоения над клеточным пространством. Если пространство X расслоено над B , то в группе сингулярных цепей X имеется полезная фильтрация: по размерностям проекций соответствующих сингулярных симплексов в B . Спектральная последовательность, порожденная этой фильтрацией, дает очень много информации, связывающей гомологии X, B и F . Однако это определение связано с очевидными сложностями, вытекающими из неоднозначности понятия размерности. Поэтому приходится прибегать к более формальным и менее инвариантным определениям этой же самой спектральной последовательности, использующим вспомогательную структуру на B ; однако полезно понимать указанную выше мотивировку этого построения.

Итак, пусть имеется расслоение $p : X \rightarrow B$ с типичным слоем F , причем его база B — связный CW -комплекс. Профильтруем B остовами: $B_i = sk^i B$, и профильтруем X прообразами этих остовов: $X_i = p^{-1}(B_i)$. Спектральная последовательность расслоения (X, B, p, F) — это спектральная последовательность, вычисляющая гомологии X и порожденная последней фильтрацией. Члены E^0 и E^1 этой спектральной последовательности зависят от выбора CW -структуры на B , а член E^2 и все последующие уже оказываются определенными инвариантно.

¹в более общем случае, когда наши фильтрации — бесконечные, здесь требуется осторожность

3.1. *От члена E^0 к члену E^1 .* По определению, член $E_{p,q}^0$ спектральной последовательности — это группа $C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$. В нашем случае эта группа распадается в прямую сумму a_p одинаковых слагаемых, где a_p — число p -мерных клеток в B , и для каждой такой клетки соответствующее слагаемое изоморфно $C_{p+q}(F \times \bar{D}^p)/C_{p+q}(F \times \partial \bar{D}^p)$, где $\bar{D}^p$ — p -мерный шар. Соответственно, дифференциал этого члена

$$\partial_0 : E_{p,q}^0 \rightarrow E_{p,q-1}^0$$

— это обычный дифференциал комплекса относительных цепей, вычисляющий относительные гомологии $H_{p+q}(F \times \bar{D}^p, F \times \partial \bar{D}^p) \simeq H_q(F)$ для каждой p -мерной клетки. В результате получаем, что группа $E_{p,q}^1$ гомологий этого комплекса имеет вид $(H_q(F))^{a_p}$, что идеологически правильно записывается еще в таком виде:

$$(2) \quad C_p(B, H_q(F));$$

здесь C_p — обозначение для клеточных цепей, а вся запись означает, что для каждой p -мерной клетки в B надо взять некоторый элемент группы $H_q(F)$. Если дан такой элемент группы (2), то соответствующий элемент группы

$$E_{p,q}^1 \equiv H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

реализуется следующим образом. Для любой p -мерной клетки U в B мы каким-то образом выбираем гомеоморфизм

$$(3) \quad p^{-1}(U) \sim U \times F,$$

согласованный с проекцией на U . Затем берем относительный $(p+q)$ -мерный цикл в $(\bar{D}^p \times F, \partial \bar{D}^p \times F)$, равную прямому произведению шара $\bar{D}^p$ на цикл в F , сопоставляемый цепью (2) нашей клетке U . Посредством характеристического гомеоморфизма (продолженного на границу клетки при помощи накрывающей гомотопии) и гомеоморфизма (3) этот относительный цикл превращается в относительный цикл в X_p по модулю X_{p-1} . Здесь важно, однако, словосочетание “каким-то образом”: вообще говоря, гомеоморфизмы вида (3) над разными клетками нельзя согласовать разумным образом, поэтому наша формула (2) содержит значительный произвол. Эта неприятность преодолима в случае, если все “коэффициентные” группы $H_q(F)$, соответствующие слоям над разными точками (или, что то же самое, над разными клетками) базы можно отождествить друг с другом. Последнее условие — это условие *гомологической простоты* нашего расслоения: оно заключается в том, что фундаментальная группа базы должна тривиально действовать на группе гомологий слоя. Конечно, это условие выполнено, если база односвязна.

3.2. *От члена E^1 к члену E^2 .* Итак, группы $E_{p,q}^1$ и $E_{p-1,q}^1$ спектральной последовательности расслоения, между которыми действует дифференциал этого члена E^1 , таковы:

$$(4) \quad C_p(B, H_q(F)) \xrightarrow{\partial_1} C_{p-1}(B, H_q(F)).$$

Допустим сначала, что наше расслоение гомологически просто, то есть коэффициентная группа $H_q(F)$ — одна и та же для всех клеток, участвующих в обоих этих выражениях. Тогда гомоморфизм (4) — это обычный граничный гомоморфизм для клеточных комплексов (с не вполне обычной группой коэффициентов), вытекающий из точной последовательности тройки (B_p, B_{p-1}, B_{p-2}) . Соответственно, группы $E_{p,q}^2$ гомологий комплексов

$$\cdots \rightarrow E_{p+1,q}^1 \rightarrow E_{p,q}^1 \rightarrow E^{p-1,q} \rightarrow \cdots,$$

составленных строками таблички E^1 с действием этого дифференциала, — это просто группы клеточных гомологий базы с такими коэффициентами:

$$(5) \quad E_{p,q}^2(X) \simeq H_p(B, H_q(F)).$$

Если же условие гомологической простоты не выполнено, то результат будет тот же самый, но группы $H_q(F)$ нельзя будет отождествить между собой для всех клеток, поэтому нам приходится в формуле поставить их в фигурные скобки:

$$(6) \quad E_{p,q}^2(X) \simeq H_p(B, \{H_q(F)\}),$$

что означает гомологии с коэффициентами в локальной системе, послойно изоморфной $H_q(F)$ и определенной действием группы $\pi_1(B)$ на гомологиях слоя.

4. Примеры.

4.1. *Пространство унитарной группы.* $SU(3)$ является пространством расслоения над S^5 со слоем S^3 . Действительно, это пространство можно рассматривать как множество всех унитарно ортонормированных реперов в $\mathbf{C}^3$. Сопоставляя такому реперу его первый вектор, мы получаем проекцию $SU(3) \rightarrow S^5$. Слой этого расслоения равен $SU(2) \sim S^3$. Член E^2 спектральной последовательности этого расслоения имеет вид

$$(7) \quad \begin{array}{c|ccccc} 3 & \mathbf{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z} \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

(имеется в виду, что все остальные группы $E_{p,q}^2$ – нулевые). Очевидно, ни один из старших дифференциалов $\partial_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$, $r \geq 2$, этой последовательности не может быть нетривиальным: для любых (p, q) либо исток, либо образ такого гомоморфизма – нулевая группа. Следовательно, эта последовательность *стабилизируется* в члене E^2 , то есть $E^2 \equiv E^\infty$. Итак, $H_i(SU(3)) \sim \mathbf{Z}$ при $i = 0, 3, 5, 8$ и тривиальна при остальных i . В частности, $H_*(SU(3)) \sim H_*(S^5 \times S^3)$. Интересно, что эта гомологическая эквивалентность не порождается топологической: между этими двумя пространствами нет гомеоморфизма.

Аналогично, легко посчитать, что $H_*(SU(4)) \sim H_*(S^7 \times S^5 \times S^3)$.

4.2. *Пространство петель сферы S^n .* Пусть X – линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0 . Мы уже рассматривали пространство путей LX , точки которого – это непрерывные отображения $[0, 1] \rightarrow X$, переводящие 0 в x_0 . Это пространство стягиваемо и обладает отображением $s : LX \rightarrow X$, переводящим всякое отображение $f : [0, 1] \rightarrow X$ в точку $f(X)$. Пространством петель ΩX пространства X называется прообраз произвольной точки $y \in X$ (как правило, той же самой точки x_0); все такие прообразы гомотопически эквивалентны между собой. Зная, что LX стягиваемо (в частности его гомологии тривиальны во всех положительных размерностях), можно попробовать вычислить гомологии ΩX через гомологии X . Рассмотрим например случай $X = S^n$, $n \geq 2$ (а на картинке ниже будет $n = 4$).

$$(8) \quad \begin{array}{c|ccccc} 3 & \mathbf{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z} \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Мы знаем строчку $\{q = 0\}$ члена E^2 спектральной последовательности расслоения $LX \rightarrow X$: это просто гомологии базы S^n этого расслоения. Более того, этот член может иметь только два ненулевых и изоморфных друг другу столбца: $E_{0,q}^2 \sim E_{n,q}^2$.

Если бы пространство ΩX имело нетривиальные гомологии в одной из размерностей $1 \dots, n-2$, то эти гомологии безболезненно проникли бы и в пространство LX : действительно, в клетки

$E_{0,q}$, $q = 1, \dots, n-2$, не действует ни один из дифференциалов ∂_r из ненулевых клеток. Напротив, если бы отображение $\partial_n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$ не было изоморфизмом $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, то пространство LX имело бы нетривиальные гомологии в размерности $n-1$ или n . Итак, $E_{0,n-1}^2 \sim \mathbf{Z}$. Но тогда и все группы $E_{n,q}^2$ равны 0 при $q = 1, \dots, n-2$ и $\mathbf{Z}$ при $q = n-1$. Рассуждая дальше точно так же, получаем по индукции, что $H_i(LS^n) = 0$ при i не кратных $n-1$ и изоморфно $\mathbf{Z}$ при i кратных $n-1$.

5. Еще два замечания.

5.1. Спектральная последовательность расслоения и гомологии слоя. Тожественное вложение $F \rightarrow X$ слоя над отмеченной точкой отображает гомологии этого слоя в гомологии пространства X . Если задать на F тривиальную фильтрацию $F_0 = F$, то это вложение уважает фильтрации, в частности задает гомоморфизм спектральных последовательностей. Если расслоение гомологически просто, то столбец $E_{0,q}^2$ совпадает² с группой гомологий F , и наш гомоморфизм $E^2(F) \rightarrow E^2(X)$ является изоморфизмом на этот столбец. Последующие гомоморфизмы ∂_r , $r \geq 3$, последовательности $E_{p,q}^r(X)$ могут нетривиально действовать в этот столбец. Подгруппа в $E_{0,q}^2$, порожденная образами всех этих дифференциалов, — это в точности ядро отображения $H_q(F) \rightarrow H_q(X)$, заданного тождественным вложением. Соответственно, образ этого отображения — это факторгруппа группы $H_q(F)$ по этому ядру.

5.2. Спектральная последовательность расслоения и гомологии базы. Проекция $p : X \rightarrow B$ также согласована с фильтрациями (где база профильтрована своими остовами) и задает гомоморфизм спектральных последовательностей $E^r(X) \rightarrow E^r(B)$. При $r = 2$ этот гомоморфизм является изоморфизмом строки $E_{p,0}^2(X)$ на $E_{p,0}^2(B) \equiv H_p(B)$. Последующие дифференциалы ∂_r , $r \geq 3$, могут нетривиально действовать из этой клетки $E_{p,0}(X)$ в другие клетки. Общее ядро всех этих отображений — это в точности образ группы $H_p(X)$ в $H_p(B)$ при проекции $X \rightarrow B$.

²напомним, что B предполагается линейно связным