В. А. Васильев
 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТОПОЛОГИИ
 Весенний семестр 2011 г.

Лекция 7. Спектральные последовательности.

Спектральная последовательность – это обобщение точной последовательности пары (X, Y) , имеющей, как вы помните, вид

$$(1) \quad \cdots \rightarrow H_{i+1}(X, Y) \rightarrow H_i(Y) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X, Y) \rightarrow H_{i-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

Такая точная последовательность применяется для вычисления групп $H_i(X)$ гомологий пространства X , если известны группы гомологий $H_i(Y)$, $H_i(X, Y)$ подпространства и факторпространства. В любом случае сразу понятно, что средняя группа $H_i(X)$ в некотором смысле “меньше” прямой суммы этих групп: она содержит подгруппу, изоморфную факторгруппе группы $H_i(Y)$, а ее фактор по этой подгруппе изоморфен некоторой подгруппе группы $H_i(X, Y)$.

На языке общей теории, пара (X, Y) называется двучленной фильтрацией. Произвольной (конечной) фильтрацией топологического пространства X называется вложенная последовательность подпространств

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_N \equiv X.$$

Такая фильтрация¹ порождает фильтрацию в каждой группе $H_i(X)$, то есть последовательность вложенных подгрупп

$$(2) \quad H_i^{(0)}(X) \subset H_i^{(1)}(X) \subset \cdots \subset H_i^{(N)}(X) \equiv H_i(X) :$$

подгруппа $H_i^{(p)}(X)$ – это образ естественного отображения $H_i(X_p) \rightarrow H_i(X)$, заданного вложением $X_p \rightarrow X$. Итог вычисления спектральной последовательности (если удастся провести это вычисление) – это не совсем группа $H_i(X)$, а соответствующая градуированная группа

$$(3) \quad \bigoplus_{p=0}^N H_i^{(p)}(X) / H_i^{(p-1)}(X),$$

где по определению $H_i^{(-1)}(X) = 0$. Эти группы, тем не менее, очень схожи: например, в случае гомологий с коэффициентами в поле они изоморфны, а для целочисленных гомологий совпадают их ранги.

Как и раньше, легко видеть, что каждое из слагаемых $H_i^{(p)}(X) / H_i^{(p-1)}(X)$ этой суммы в некотором смысле “не больше” соответствующей группы $H_i(X_p, X_{p-1})$. А именно, оно получается из этой (фактор)группы двумя операциями, каждая из которых может только уменьшить ее: уменьшением группы образующих и увеличением группы соотношений. Скажем это подробнее. Во-первых, среди элементов группы $H_i(X_p, X_{p-1})$ (по определению представляемых относительными циклами, то есть сингулярными i -цепями, граница которых лежит в X_{p-1}) мы должны выбрать только те, которые представимы не относительными, а настоящими циклами, граница которых просто равна 0. Во-вторых, если при определении группы $H_i(X_p, X_{p-1})$ мы факторизовали только по тем цепям, которые задаются границами $(i+1)$ -мерных цепей, лежащих в X_p , то теперь нам надо объявить нулевыми все возможные границы любых $(i+1)$ -цепей пространства X (или, если угодно, любых относительных цепей пары (X, X_{p-1})), поскольку все, что лежит в X_{p-1} , разумеется, никакой роли не играет).

¹В высшей математике часто бывает полезно рассматривать и бесконечные фильтрации, но пока что давайте попробуем разобраться с конечными, а обобщение будет уже проще.

Часто бывает удобно совершить этот переход от групп $H_i(X_p, X_{p-1})$ к $H_i^{(p)}(X)/H_i^{(p-1)}(X)$ постепенно, используя нашу фильтрацию для определения промежуточных условий. А именно, при определении промежуточных групп $E_{p,i-p}^r$, $r = 1, \dots, \infty \leq N$, соединяющих эти группы, мы последовательно накладываем все более сильные условия (граница должна лежать в X_{p-1} , в $X_{p-2}, \dots$, в X_{-1}) и все более сильные соотношения (факторизуем по границам цепей, лежащих в X_p , в $X_{p+1}, \dots$, в X_N). Конечно, можно было бы сделать эти процедуры по очереди: сначала наложить все ограничения, постепенно усиливая их (то есть попросту вычислить факторгруппу группы $H_*(X_p)$ по подгруппе, реализуемой циклами, лежащими в X_{p-1}), а потом то, что получилось, профакторизовать по (все более сильным) соотношениям. Но экспериментальный факт состоит в том, что как правило эти процедуры полезно совершать одновременно, равномерно усиливая как условия, так и соотношения.

Кроме того, оказалось полезным ввести не совсем очевидную индексацию. Группы $H_i(X_p, X_{p-1})$ и $H_i^{(p)}(X)/H_i^{(p-1)}(X)$ соединяются последовательностью (уменьшающихся, или по крайней мере невозрастающих) групп, обозначаемых $E_{p,q}^r$, $r = 1, 2, \dots$, где $q = i - p$. Таким образом, спектральная последовательность — это последовательность табличек, занумерованных числами $r = 1, 2, \dots$; для каждого r соответствующая табличка — это набор абелевых групп, записанных в каждой точке $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, лежащей либо где угодно в первом квадранте, либо выше диагонали в четвертом квадранте. Размерность i групп гомологий — это сумма $p + q$ координат точки. Например, все слагаемые группы (3) будут записаны на диагонали $\{(p, q) | p + q = i, p \geq 0\} \subset \mathbf{Z}^2$ для таблички E^∞ ; всякая же начальная группа $H_i(X_p, X_{p-1})$ будет лежать на этой же диагонали для таблички E^1 .

Теперь перейдем к точным определениям. Определим группы

$$(4) \quad E_{p,q}^0 \equiv C_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \equiv C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1}).$$

Между этими группами действуют обычные граничные операторы комплексов $C_*(X_p, X_{p-1})$, которые в данных обозначениях связывают группы, изображаемые одна над другой: $\partial^0 : E_{p,q}^0 \rightarrow E_{p,q-1}^0$. Все столбцы таблички $E_{*,*}^0$ при этом превращаются в комплексы, гомологии которых — это обычные относительные гомологии пары (X_p, X_{p-1}) .

Определение 1. Подгруппа $Z_{p,q}^r \subset E_{p,q}^0$ определяется как множество всех элементов $\alpha \in C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$, которые можно реализовать такими элементами $a \in C_{p+q}$, что $da \in X_{p-r}$.

Подгруппа $B_{p,q}^r \subset E_{p,q}^0$ — это множество всех элементов, реализуемых классами границ цепей, лежащих в X_{p+r-1} . Итак, элемент $\alpha \in C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$ (то есть смежный класс группы $C_{p+q}(X_p)$ по подгруппе $C_{p+q}(X_{p-1})$) принадлежит подгруппе $B_{p,q}^r$ если найдется $b \in C_{p+q+1}(X_{p+r-1})$ такой, что $db \in \alpha$.

Очевидно,

$$Z_{p,q}^0 \supset Z_{p,q}^1 \supset Z_{p,q}^2 \supset \dots \supset Z_{p,q}^\infty \supset B_{p,q}^\infty \supset \dots \supset B_{p,q}^2 \supset B_{p,q}^1 \supset B_{p,q}^0.$$

При этом по определению $Z_{p,q}^0 = C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$, $B_{p,q}^0 = 0$, $H_{p+q}^{(p)}(X)/H_{p+q}^{(p-1)}(X) = Z_{p,q}^\infty/B_{p,q}^\infty$.

Поэтому можно определить $E_{p,q}^r$ как факторгруппу $Z_{p,q}^r/B_{p,q}^r$. При $r = 0$ это определение согласовано с исходным обозначением $E_{p,q}^0$. Легко проверить также равенства

$$E_{p,q}^1 \simeq H_{p+q}(X_p, X_{p-1});$$

как только что было отмечено,

$$E_{p,q}^\infty \simeq H_{p+q}^{(p)}(X)/H_{p+q}^{(p-1)}(X).$$

Рассмотрим например трехчленную фильтрацию $X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X$. Три строки ее члена E^1 , соответствующие значениям $q = t - 2, t - 1$ и t состоят из групп, записанных в следующей таблице:

$$(5) \quad \begin{array}{c|ccc} q = t & H_t(X_0) & \leftarrow H_{t+1}(X_1, X_0) & \leftarrow H_{t+2}(X_2, X_1) \\ q = t - 1 & H_{t-1}(X_0) & \leftarrow H_t(X_1, X_0) & \leftarrow H_{t+1}(X_2, X_1) \\ q = t - 2 & H_{t-2}(X_0) & \leftarrow H_{t-1}(X_1, X_0) & \leftarrow H_t(X_2, X_1) \\ \hline & p = 0 & p = 1 & p = 2 \end{array}$$

Стрелки, изображенные в этой же таблице, — это граничные операторы точных последовательностей тройки (X_2, X_1, X_0) и пары (X_1, X_0) (которую для единообразия здесь удобно рассматривать также как тройку $(X_1, X_0, \emptyset)$).

Эти стрелки (и аналогичные стрелки для произвольной спектральной последовательности, порожденной фильтрацией) превращают каждую строчку члена E^1 в цепной комплекс. Например, если X — CW-комплекс, и наша фильтрация — это фильтрация остовами, то все ненулевые элементы $E_{p,q}^1$ члена E^1 лежат только в строчке $q = 0$ и эта строчка представляет собой в точности клеточный комплекс этого пространства, в частности его гомологии — это клеточные гомологии нашего пространства. Легко посчитать, что для произвольной спектральной последовательности и любых p, q группа гомологий этого комплекса, происходящая из члена $E_{p,q}^1$, естественно изоморфна определенной выше группе $E_{p,q}^2$.

Теперь посмотрим, что происходит с диаграммой (5) на следующем шаге спектральной последовательности. После действия ее горизонтальных стрелок, то есть дифференциалов из точных последовательностей троек, остаются следующие группы гомологий соответствующих комплексов:

$$(6) \quad \begin{array}{c|ccc} q = t & \frac{H_t(X_0)}{\partial(H_{t+1}(X_1, X_0))} & \frac{\ker \partial(H_{t+1}(X_1, X_0))}{\partial(H_{t+2}(X_2, X_1))} & \ker \partial(H_{t+2}(X_2, X_1)) \\ q = t - 1 & \frac{H_{t-1}(X_0)}{\partial(H_t(X_1, X_0))} & \frac{\ker \partial(H_t(X_1, X_0))}{\partial(H_{t+1}(X_2, X_1))} & \ker \partial(H_{t+1}(X_2, X_1)) \\ q = t - 2 & \frac{H_{t-2}(X_0)}{\partial(H_{t-1}(X_1, X_0))} & \frac{\ker \partial(H_{t-1}(X_1, X_0))}{\partial(H_t(X_2, X_1))} & \ker \partial(H_t(X_2, X_1)) \\ \hline & p = 0 & p = 1 & p = 2 \end{array}$$

Посмотрим, например, на ее верхнюю левую клетку $E_{0,t}^2 = \frac{H_t(X_0)}{\partial(H_{t+1}(X_1, X_0))}$. В силу точной последовательности пары (X_1, X_0) это в точности вклад группы $H_t(X_0)$ в группу $H_t(X_1)$, то есть подгруппа в $H_t(X_1)$, порожденная циклами, лежащими в X_0 . Но, возможно, не вся эта подгруппа целиком превращается в аналогичную подгруппу в $H_t(X_2)$: может случиться, что некоторые ее нетривиальные элементы (задаваемые циклами, не гомологичными 0 в X_1) окажутся гомологичны 0 в X_2 . Последнее условие для элемента a нашей группы состоит в том, что найдется относительный $(t + 1)$ -мерный цикл в X_2 по модулю X_0 , граница которого гомологична элементу a . Теперь заметим, что группа относительных $(t + 1)$ -мерных циклов пространства X_2 по модулю X_0 закодирована в правой средней клетке $E_{2,t-1}^2 = \ker \partial(H_{t+1}(X_2, X_1))$ этой же таблицы. Корректно определен гомоморфизм между этими клетками: $\partial_2 : E_{2,t-1}^2 \rightarrow E_{0,t}^2$: всякому относительному циклу в X_2 по модулю X_0 ставится в соответствие его граница, а затем производятся всевозможные факторизации (то есть мы берем класс этой границы в надлежащей факторгруппе, и более того рассматриваем его не просто как образ нашего относительного цикла, а как образ содержащего его смежного класса — в данном случае

по модулю всех цепей подпространства $X_1 \subset X_2$; при этом необходимо проверить, что результат не зависит от выбора представителя этого смежного класса). Искомая подгруппа $H_t^{(0)}(X) \subset H_t(X)$ — это факторгруппа группы $E_{0,t}^2$ по образу этого гомоморфизма. С другой стороны, не менее искомая группа $H_{t+1}^{(2)}(X)/H_{t+1}^{(1)}(X)$ (измеряющая добавок группы $H_{t+1}(X)$) по сравнению с подгруппой, порожденной циклами, лежащими в X_1 — это в точности ядро этого же гомоморфизма ∂_2 . Окончательно, сделаем над табличкой (6) следующие преобразования: все клетки $E_{0,q}^2$ профакторизуем по образу этого гомоморфизма $\partial_2 : E_{2,q-2}^2 \rightarrow E_{0,q}^2$, а все клетки $E_{2,q}^2$ заменим на ядра этих же гомоморфизмов. Группы $E_{1,q}^2$ оставим неизменными. Полученные во всех этих местах клетки обозначим соответственно через $E_{0,q}^3$, $E_{2,q}^3$ и $E_{1,q}^3$, а всю табличку, состоящую из этих групп $E_{p,q}^3$ — через E^3 . Эта табличка и является искомой табличкой, дающей нам градуированную группу (3).

К сожалению, все так просто только в случае трехчленной фильтрации. В общем случае мы точно так же получаем систему гомоморфизмов $\partial_2 : E^{p,q} \rightarrow E^{p-2,q+1}$ для всех возможных p, q . Действительно, группа $E_{p,q}^2$ по определению (см. стр. 2) порождена относительными циклами в X_p по модулю X_{p-2} . Для всякого элемента A этой группы, реализуем ее таким относительным циклом и возьмем его граница. Эта граница — абсолютный цикл в X_{p-2} ; его смежный класс и определяет образ нашего элемента A под действием гомоморфизма ∂_2 .

Эти дифференциалы ∂_2 превращают группу $E^2 \equiv \bigoplus_{p,q} E_{p,q}^2$ в цепной комплекс: композиция операторов $\partial_2 \circ \partial_2 : E_{p+2,q-1}^2 \rightarrow E_{p-2,q+1}^2$ очевидно равна нулю.

Теорема 1. *Группа гомологий этого комплекса, связанная с клеткой $E_{p,q}$ (то есть ядро оператора $\partial_2 : E_{p,q}^2 \rightarrow E_{p+2,q+1}^2$, профакторизованное по образу оператора $\partial_2 : E_{p+2,q-1}^2$) совпадает с группой $E_{p,q}^3$, определенной на стр. 2.*

Доказательство сводится к раскрытию определений.

Точно так же определяются все следующие дифференциалы $\partial_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$, и группы гомологий каждого такого комплекса $\{E^r\}$ оказываются совпадающими со следующей группой E^{r+1} .