Алгебра. Листок 11.

В этом листке S_n обозначает группу перестановок из n элементов, A_n — группу четных перестановок, D_n — группу всех движений плоскости, сохраняющих правильный n-угольник (группа диэдра). Теорема о том, что любая конечная абелева группа изоморфна прямому произведению циклических групп, предполагается известной без доказательства.

$\diamond$ **11.1.** *Докажите, что определение группы равносильно следующему: группа это множество с такой ассоциативной операцией, что любое уравнение вида* $ax = b$ *или* $ya = b$ *имеет однозначное решение.*

$\diamond$ **11.2.** *Докажите, что группу* G *можно представить в виде прямого произведения тогда и только тогда, когда* G *содержит две такие подгруппы* H *и* K, *что:*
1) $H \cap K = \{e\}$ *(*e *— единичный элемент группы* G*);*
2) $\forall h \in H$ *и* $\forall k \in K \quad h \cdot k = k \cdot h$*;*
3) $\forall g \in G$ *элемент* g *можно представить в виде* $g = h \cdot k$, *где* $h \in H$ *и* $k \in K$.

$\diamond$ **11.3.** *Рассмотрим мультипликативные группы* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R}, \quad x > 0\}$, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$, $\{\pm 1\}$.
1) Докажите, что $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}^*_+ \times \{\pm 1\}$. *2) Докажите, что* $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{S}^1$.

$\diamond$ **11.4.** *Какие из групп* $\mathbb{Z}^*_n$, $n \leq 15$, *циклические, а какие нет? Представьте одну из нециклических групп из этого списка (по выбору преподавателя) как прямое произведение циклических групп.*

$\diamond$ **11.5.** *Перечислите все попарно неизоморфные абелевы группы порядка 36.*

$\diamond$ **11.6.** *Докажите, что любую конечную абелеву группу можно представить в виде прямого произведения* $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$, *так что* $n_i \mid n_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, *причем группы, соответствующие разным таким последовательностям* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *попарно не изоморфны.*

$\diamond$ **11.7.** *1) При каких значениях* n *группы* $D_n \times \mathbb{Z}_2$ *и* D_{2n} *изоморфны?*
2) Докажите, что при $m > 2$ *группы* $D_n \times \mathbb{Z}_m$ *и* D_{mn} *никогда не изоморфны.*

$\diamond$ **11.8.** *Докажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.*

$\diamond$ **11.9.** *Докажите, что ядро и образ гомоморфизма являются подгруппами, причем ядро является нормальной подгруппой.*

$\diamond$ **11.10.** *Дайте определение нормальной подгруппы, фактор-группы и канонического гомоморфизма группы в фактор-группу; докажите корректность всех определений.*

$\diamond$ **11.11.** *Докажите теорему о гомоморфизме: если* $f : G \to L$ *— гомоморфизм групп, то* $\operatorname{Im} f \cong G/\operatorname{Ker} f$.

$\diamond$ **11.12.** *Докажите, что подгруппа нормальна тогда и только тогда, когда вместе с любым элементом она содержит все сопряженные к нему.*

$\diamond$ **11.13.** *Докажите, что любая группа простого порядка циклическая.*

$\diamond$ **11.14.** *Приведите пример подгруппы, не являющейся нормальной.*

$\diamond$ **11.15.** *Перечислите все (с точностью до изоморфизма) группы*
1) порядка 4; 2) порядка 4; 3) порядка 8.

$\diamond$ **11.16.** *Перечислите все нормальные подгруппы в группе* D_4. *Найдите фактор-группу по одной из них (по указанию преподавателя).*

$\diamond$ **11.17.** *Перечислите все циклические подгруппы в группе 1)* S_4*; 2)* S_5.

$\diamond$ **11.18.** *Перечислите все нормальные подгруппы в группе 1)* S_3*; 2)* S_4 *3)* S_5.

◇ **11.19.** *Рассмотрим четыре матрицы из* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$*:* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. *Докажите, что множество* $Q_8 = \{\pm E, \pm I, \pm J \pm K\}$. *является подгруппой в* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. *найдите порядки всех элементов в* Q_8. *Докажите, что* D_4 *и* Q_8 *не изоморфны.* Q_8 *называется группой кватернионов.*

◇ **11.20.** *Перечислите все подгруппы в группе кватернионов* Q_8*, укажите, какие из них нормальны, и найдите фактор-группу по одной из них (по указанию преподавателя).*

◇ **11.21.** *Приведите пример двух неизоморфных групп* G_1 *и* G_2 *и их нормальных подгрупп* $H_1 \subset G_1$ *и* $H_2 \subset G_2$*, таких что* $H_1 \cong H_2$ *и* $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.

◇ **11.22.** *Для каждого непростого делителя* d *числа 24 укажите в* S_4 *нециклическую подгруппу порядка* d*. Какие из этих подгрупп нормальны? Для нормальных подгрупп найдите фактор-группы.*

◇ **11.23.** *Докажите, что в группе четных перестановок* A_4 *нет подгруппы порядка 6.*

◇ **11.24.** *Докажите следующие свойства порядка элемента группы. (Сдается одно свойство по выбору преподавателя.)*
1) $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b^{-1}ab)$. *2) Если* $a^m = e$*, то* $\mathrm{ord}(a) \mid m$.
3) Если числа m *и* $\mathrm{ord}(a)$ *взаимно просты, то* $\mathrm{ord}(a^m) = \mathrm{ord}(a)$.
4) Если $m \mid \mathrm{ord}(a)$*, то* $\mathrm{ord}(a^m) = \frac{\mathrm{ord}(a)}{m}$. *5)* $\forall m\ \mathrm{ord}(a^m) = \frac{\mathrm{ord}(a)}{\text{НОД}(\mathrm{ord}(a),m)}$.

◇ **11.25.** *Дано шесть групп:* $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7^*$, D_3, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2)$, S_3, *верхнетреугольные матрицы из* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_3)$*. Какие из них попарно изоморфны?*

◇ **11.26.** *1) Докажите, что если элементы* a *и* b *некоторой группы коммутируют (т.е.* $ab = ba$*), то* $\mathrm{ord}(ab)$ *является делителем числа* $\text{НОК}(\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b)$.
2) Покажите, что в условиях предыдущего пункта $\mathrm{ord}(ab)$ *может быть любым делителем числа* $\text{НОК}(\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b)$.
***3) Покажите, что* $\forall k,l,m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k,l,m > 1$*, существует такая группа и такие элементы* a *и* b *в ней, что* $\mathrm{ord}\, a = k$, $\mathrm{ord}\, b = l$, $\mathrm{ord}(ab) = m$.
**4) Приведите требуемый в предыдущем пункте пример хотя бы для* $k = l = 2$.

◇ **11.27.** *Любая подгруппа конечной группы* G *нормальна. Верно ли, что группа* G *абелева?*

◇ **11.28.** *Докажите, что любая группа порядка* $2p$*, где* p *— нечетное простое число, либо является циклической, либо группой диэдра.*

◇ **11.29.** *Даны две конечные группы* G *и* H*. Очевидно, что если для некоторого натурального числа* k *группы* G *и* H *содержат* **разное** *число элементов порядка* k*, то эти группы не могут быть изоморфны.*
1) Верно ли, что если $\forall\ k \in \mathbb{N}$ *конечные группы* G *и* H *содержат* **одинаковое** *число элементов порядка* k*, то эти группы изоморфны?*
2) Верно ли предыдущее утверждение, если известно, что конечные группы G *и* H *абелевы?*

◇ **11.30.** *Какие из выписанных в каждом ряду групп попарно изоморфны?*
1) D_8, $D_4 \times \mathbb{Z}_2$, $Q_8 \times \mathbb{Z}_2$; *2)* S_4, D_{12}, $D_6 \times \mathbb{Z}_2$, $D_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $D_3 \times \mathbb{Z}_4$, $Q_8 \times \mathbb{Z}_3$, $D_4 \times \mathbb{Z}_3$.

◇ **11.31.** *Представьте цикл* $(123\ldots n) \in S_n$ *в виде произведения* $n-1$ *транспозиции.*

◇ **11.32.** *Докажите, что две перестановки в симметрической группе* S_n *сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый цикленный тип.*

◇ **11.33.** *Докажите, что множество четных перестановок* A_n *образуют нормальную подгруппу в* S_n*. Каков ее порядок?*

◇ **11.34.** *Найдите группы автоморфизмов следующих групп:*
1) $\mathbb{Z}_n$; *2)* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; *3)* D_3; *4)* D_4; *5)* Q_8.

◇ **11.35.** *Придумайте некоммутативную группу 1) порядка 21; 2) порядка 27; 3) порядка 12, не изоморфную* A_4 *и* D_6*; 3) порядка 18, не изоморфную* D_9*;*