18.1. Исследуйте следующие ряды на сходимость: **1)** $\sum\limits_n \frac{1}{n^p}$; **2)** $\sum\limits_n \frac{1}{n \ln^p n}$; **3)** $\sum\limits_n \frac{1}{n \ln(\ln n)}$; **4)** $\sum\limits_n \frac{x^n n!}{n^n}$ $(x \geqslant 0)$; **5)** $\sum\limits_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$; **6)** $\sum\limits_n \frac{\operatorname{tg}^2 n}{n^{|\operatorname{tg} n|}}$.

18.2. Придумайте такую последовательность $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots \to 0$, что ряд $\sum\limits_n \frac{1}{n^{1+\alpha_n}}$ **1)** сходится; **2)** расходится.

18.3. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum\limits_n a_n$ расходится. Положим $S_n = \sum\limits_{k \leqslant n} a_k$. Докажите, что **1)** ряд $\sum\limits_n \frac{a_n}{S_n^p}$ сходится при $p > 1$; **2)** $\sum\limits_n \frac{a_n}{e^{S_n}} < 1$; **3)** ряд $\sum\limits_n \frac{a_n}{S_n}$ расходится.

Определение 18.1. Функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого отрезка.

Определение 18.2. Функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *кусочно непрерывной*, если на любом отрезке она имеет лишь конечное число разрывов первого рода.

Определение 18.3. Пусть $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кусочно непрерывные функции, причем одна из них финитна. *Свёрткой* f и g называется функция

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t)\, dt.$$

18.4 (*Свойства свёртки*). **1)** Докажите, что $f*g$ непрерывна для любых кусочно непрерывных f, g.
2) Докажите, что $f * g = g * f$.
3) Пусть $g \in C^n(\mathbb{R})$. Докажите, что $f * g \in C^n(\mathbb{R})$ и $f * g^{(k)} = (f * g)^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

18.5 (*Сглаживание пеньков*). **1)** Для произвольного $\varepsilon > 0$ постройте такую функцию $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\varphi_\varepsilon \geqslant 0$, $\varphi_\epsilon = 0$ вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$, и $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = 1$.

В следующих пунктах f — кусочно непрерывная функция.
2) Докажите, что $(f * \varphi_\varepsilon)(x) \to f(x)$ при $\varepsilon \to 0$, если f непрерывна в x.
3) Докажите, что сходимость из п. 5 является равномерной на любом отрезке, в окрестности которого f непрерывна.
4) Пусть все φ_ε чётны (покажите, что этого можно добиться). Куда стремится $(f * \varphi_\varepsilon)(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в точках разрыва f?

18.6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — множество нулевой меры. Докажите, что его дополнение плотно в $\mathbb{R}^n$.

Определение 18.4. Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет *нулевой объем*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется конечное покрытие $E \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$ брусками, такое, что $\sum_{i=1}^N \operatorname{Vol}(I_i) < \varepsilon$.

18.7. 1) Пусть множество ограничено и имеет нулевую меру. Следует ли отсюда, что оно имеет нулевой объем?
2) Докажите, что для компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ ответ на предыдущий вопрос положителен.

18.8. Докажите, что объединение счетного числа множеств нулевой меры есть множество нулевой меры. Верно ли аналогичное утверждение о множествах нулевого объема?

18.9. Пусть $f \colon E \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на открытом или замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что ее график Γ_f имеет $(n+1)$-мерную меру 0.

18.10. Докажите, что если E имеет нулевой объем, то и ∂E тоже имеет нулевой объем. Верно ли аналогичное утверждение, если «нулевой объем» заменить на «нулевую меру»?