УрЧП: зачет

Задача 1. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$u_{xxyy} = 0.$$

Задача 2. Пусть $a \in (0, 2\pi)$ и $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая, что $f(0) = f(2\pi) = 0$, $f(a) = b$, и ограничения функции f на отрезки $[0, b]$, $[b, 2\pi]$ есть линейные неоднородные функции. Разложите функцию f в ряд Фурье.

Задача 3. Докажите, что всякая функция $u(x, y)$, график которой — верхняя полусфера с центром на плоскости $z = 0$, удовлетворяет уравнению

$$u^2(1 + u_x^2 + u_y^2) = 1.$$

Найдите еще хотя бы одно решение этого уравнения, отличное от описанных выше.

Задача 4. Докажите, что график 1-струи любого решения уравнения $u_x^3 + e^{u_x u_y} = 1$ является объединением прямолинейных интервалов.

Задача 5. Приведите следующее уравнение к каноническому виду:

$$(x - y)u_{xx} + (xy - y^2 - x + y)u_{xy} = 0.$$

Задача 6. По полуограниченной струне $0 \leq x < \infty$ бежит волна $u(x, t) = f(x + at)$ при $t < 0$. Найдите колебания струны при $t > 0$ для случая, когда конец ступы свободен, т.е. $u_x(0, t) = 0$.

Задача 7. Найдите хотя бы одно решение трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

имеющее вид $u(x, y, z, t) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sin(\omega t)$.

Задача 8. Найдите непрерывную в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leq 1$ и гармоническую в открытом круге $x^2 + y^2 < 1$ функцию $u(x, y)$, такую, что

$$u(\cos\phi, \sin\phi) = \cos(2\phi).$$