В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 9. Спектральная последовательность расслоения (продолжение)

1. Еще пример: гомологии упорядоченного конфигурационного пространства. Обозначим через $F(\mathbf{R}^n, k)$ пространство всевозможных упорядоченных наборов из k попарно различных точек в $\mathbf{R}^n$. Его можно рассматривать как открытое подмножество в $\mathbf{R}^{n\times k}$, полученное выбрасыванием $\binom{k}{2}$ плоскостей размерности $n(k-1)$. Пусть еще $\vee_i X$ — это букет i экземпляров пространства X.

Теорема 1. *При любых $n \geq 2$ и k имеется изоморфизм групп*

$$H_*(F(\mathbf{R}^n, k)) \simeq H_*(S^{n-1} \times \vee_2 S^{n-1} \times \cdots \times \vee_{k-1} S^{n-1}). \tag{1}$$

В частности, все группы $H_m(F(\mathbf{R}^n, k))$ — свободные абелевы и тривиальны при m не кратных $n-1$, а полином Пуанкаре группы $H_*(F(\mathbf{R}^n, k))$ равен

$$(1 + t^{n-1})(1 + 2t^{n-1}) \cdots (1 + (k-1)t^{n-1}).$$

Разберем сначала более простой случай $n \geq 3$. Имеется очевидное расслоение $F(\mathbf{R}^n, k) \to F(\mathbf{R}^n, k-1)$: набору из k упорядоченных точек ставятся в соответствие первые $k-1$ точек этого набора. Слой этого расслоения — это пространство $\mathbf{R}^n$ без $k-1$ точки, что гомотопически эквивалентно букету $k-1$ экземпляров $(n-1)$-мерной сферы. База этого расслоения односвязна (это верно для всякого векторного пространства, из которого выброшено подмножество коразмерности ≥ 3), следовательно это расслоение гомологически просто. Член E^2 его спектральной последовательности имеет члены

$$E^2_{p,q} \simeq H_p(F(\mathbf{R}^n, k-1), H_q(\vee_{k-1} S^{n-1}). \tag{2}$$

В силу предположения индукции, эти члены могут быть не равны 0 только при p кратном $k-1$ и при q равном 0 или $k-1$. При $n = 4$ положение возможных ненулевых членов изображено квадратиками на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
3 & \square & 0 & 0 & \square & 0 & 0 & \square & 0\dots \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\
0 & \square & 0 & 0 & \square & 0 & 0 & \square & 0\dots \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{array} \tag{3}$$

Отсюда сразу видно, что все возможные следующие дифференциалы $\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$, $r \geq 2$ — нулевые (действительно, полные размерности $p+q$ и $p+q-1$ истока и образа такого дифференциала не могут быть одновременно кратны $n-1$), и $E^2 = E^\infty$. Это доказывает утверждение теоремы при $n \geq 3$.

Пусть теперь $n = 2$. Тогда[1] ненулевые клетки (p, q) члена E^2 могут лежать только в двух строках $q = 0$ и $q = 1$, и только при $p \in \{0, 1, \dots, k-2\}$. В этом случае возникает два осложнения. Во-первых, база расслоения перестает быть односвязной, поэтому гомологическая простота расслоения нуждается в обосновании. Конечно, действие фундаментальной группы базы на нульмерных гомологиях слоя тривиально, поэтому под подозрением находится лишь ее действие на одномерных гомологиях пространства $\mathbf{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ точка}\}$. Но эти

[1] Нижеследующее рассуждение взято из статьи В.И.Арнольда “Гомологии крашеных кос” и, как указывает ее автор, принадлежит Д.Б.Фуксу.

гомологии порождены $k-1$ маленькими окружностями, обходящими эти $k-1$ точку. Любая петля в базе нашего расслоения — это некоторое одновременное движение конфигурации из $k-1$ точки на плоскости, во время которого они не сталкиваются, и в конце движения все эти точки приходят на старое место (поскольку точки конфигурации упорядочены). Соответствующее действие на одномерных гомологиях слоя определено движением наших базисных маленьких окружностей, сопровождающим это движение их центральных точек. Поскольку все эти точки возвращаются на старое место, то и эти базисные окружности приходят сами в себя, и действие в гомологиях слоя действительно тривиально. В частности, формула (2) верна и в этом случае (с $n=2$).

Теперь второе осложнение: необходимость доказывать, что и в этом случае дифференциал ∂_2 равен 0. (Конечно, тривиальность всех последующих дифференциалов очевидна: все они действуют в нулевые клетки). Для этого достаточно доказать, что для всех p вложение $E^\infty_{p,0} \to E^2_{p,0}$ является изоморфизмом. На прошлой лекции мы видели, что образ этого вложения совпадает с образом гомоморфизма $H_p(E) \to H_p(B)$, заданного проекцией $E \to B$ нашего расслоения. Значит, достаточно доказать, что любой цикл a в базе $B \equiv F(\mathbf{R}^2, k-1)$ является проекцией некоторого цикла из $F(\mathbf{R}^2, k)$. Пусть x, y – координатные функции в $\mathbf{R}^2$. Цикл a является компактным подмножеством в $F(\mathbf{R}^2, k-1)$, поэтому найдется число N такое, что для любой точки этого цикла (то есть некоторого набора из $k-1$ точки в $\mathbf{R}^2$) значения функции x на всех этих точках не превосходят N. Определим цикл $\tilde{a}$ в $F(\mathbf{R}^2, k)$, получаемый из a добавлением к каждой $(k-1)$-конфигурации, определяющей какую-либо точку этого цикла, k-й точки $(N+1, 0)$ (по построению не совпадающей ни с одной из $k-1$ точек этой конфигурации). Очевидно, $\tilde{a}$ переходит в a при проекции нашего расслоения, и утверждение доказано. Окончание доказательства теоремы – такое же, как в случае $n \geq 3$.

2. Трансгрессия. В теориях гомотопических групп и групп гомологий много похожего: например, точные последовательности пар и троек. В остальном, обычно группы гомологий вычисляются намного легче. Однако, есть один сюжет, в котором гомотопические группы веду себя проще: для таких групп есть точная последовательность расслоения

$$\cdots \to \pi_{i+1}(B) \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \dots, \tag{4}$$

получающаяся из точной последовательности пары (E, F) и изоморфизмов

$$\pi_i(B) \equiv \pi_i(E, F) \tag{5}$$

доказываемых при помощи свойства накрывающей гомотопии.

Для групп гомологий пространств, участвующих в конструкции расслоения, аналогичной точной последовательности нет. Аналогом отображений $\pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F)$ в гомологическом случае является **гомоморфизм трансгрессии** $\partial_i : E^i_{i,0} \to E^i_{0,i-1}$. По определению, он[2] действует из некоторой подгруппы группы $H_i(B) \equiv E^2_{i,0}$ (а именно из пересечения ядер всех предыдущих дифференциалов $\partial_r : E^r_{i,0} \to E^r_{i-r,r-1}$, $r = 2, \dots, i-1$) в некоторую факторгруппу группы $H_{i-1}(F) \equiv E^i_{0,i-1}$ (а именно, в фактор ее по образам всех предыдущих дифференциалов $\partial_r : E^r_{r,i-r+1} \to E^r_{0,i-1}$, $r = 2, \dots, i-1$). Смысл этого отображения (и соединяемых им групп) в обычных терминах – следующий.

Группа $E^i_{i,0}$ – это не что иное, как образ относительной группы гомологий $H_i(E, F)$ в $H_i(B) \equiv H_i(B, b_0)$ при проекции $(E, F) \to (B, b_0)$ (b_0 – это отмеченная точка в базе). Действительно, мы можем вычислять эту относительную группу гомологий при помощи той же фильтрации, при этом мы можем и будем предполагать, что в базе имеется единственная 0-мерная клетка b_0. Вычисление будет таким же, что и раньше, с единственным изменением: все дифференциалы ∂_r, бившие раньше в столбец $p = 0$, будут заменяться на нулевые. Таким

[2]в случае гомологически простого расслоения

образом, все группы новой спектральной последовательности $\tilde{E}^r_{p,q}$, отвечающие за группу $H_i(E,F)$, то есть группы $\tilde{E}^r_{p,i-p}$, содержат старые группы $E^r_{p,i-p}$ в качестве подгрупп. При $r=i$ все они уже стабилизируются: $\tilde{E}^i_{p,i-p} \simeq \tilde{E}^\infty_{p,i-p}$. При отображении в гомологии базы, заданном проекцией нашего расслоения, все эти группы переходят в 0, кроме крайней группы $\tilde{E}^\infty_{i,0}$, вкладывающейся тождественно.

Теперь наш дифференциал $\partial_i : E^i_{i,0} \to E^i_{0,i-1}$ приобретает следующий смысл. Для всякого элемента α группы $H_i(B)$, лежащего в образе группы $H_i(E,B)$, мы выбираем какой-то из прообразов этого элемента в последней группе, и берем границу этого прообраза в группе $H_{i-1}(B)$. При этом, конечно, класс этой границы зависит от выбора прообраза. Но разные способы такого выбора отличаются на элементы ядра отображения проекции $H_i(E,F) \to H_i(B)$. Как мы видели, это ядро учитывается группами $\tilde{E}^\infty_{p,i-p}$ с p строго меньшими чем i. Границы в F всех относительных циклов, реализующих эти группы, лежат в подгруппах, по которым мы последовательно факторизовали, переходя от $E^2_{0,i-1} \equiv H_{i-1}(F)$ к $E^i_{0,i-1}$. Поэтому корректно определен класс этой границы в факторгруппе $H_{i-1}(F)$ по образам всех этих гомоморфизмов. Этот класс и является образом класса α при гомоморфизме трансгрессии.

Эти гомоморфизмы заслуживают такого специального внимания потому, что во многих частных важных случаях к ним сводятся все остальные дифференциалы спектральной последовательности.