В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 10. Умножение в спектральной последовательности расслоения

1. Когомологическая спектральная последовательность. В теории гомологий очень полезен переход к сопряженным объектам: от цепей к коцепям, от граничных операторов к кограничным, от гомологий к когомологиям. При этом переходе подгруппам соответствуют факторгруппы. В частности, если у нас есть пара пространств (X, Y), $Y \subset X$, то возникают факторгруппы относительных цепей $C_i(X,Y) \equiv C_i(X)/C_i(Y)$; сопряженным объектом будут подгруппы $C^i(X,Y) \subset C^i(X)$, состоящие из всех коцепей в X, принимающих нулевое значение на цепях, лежащих в Y. Эти подгруппы вместе с группами $C^i(X)$ и $C^i(Y)$ образуют короткую точную последовательность комплексов, а следовательно когомологии состоящего из них коцепного комплекса участвуют в когомологической точной последовательности

$$\cdots \leftarrow H^{i+1}(X,Y) \leftarrow H^i(Y) \leftarrow H^i(X) \leftarrow H^i(X,Y) \leftarrow H^{i-1}(Y) \leftarrow \dots \tag{1}$$

Как мы помним, пара пространств (X, Y) — это простейший пример возрастающей фильтрации пространств, в более общем варианте выглядящей так: $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N = X$. Такая фильтрация определяет убывающую фильтрацию в группах $C^i(X)$: $C^i(X) \supset C^i_{(0)} \supset C^i_{(1)} \supset \dots \supset C^i_{(N)}$, где $C^i_{(p)}$ — группа коцепей, обращающихся в 0 на всех цепях, лежащих в X_p. Эта фильтрация порождает убывающую фильтрацию в группах когомологий: подгруппа $H^i_{(p)}(X) \subset H^i(X)$ состоит из всех классов когомологий, которые можно реализовать коциклами, лежащими в $C^i_{(p)}$. Точно так же, как и раньше, строится когомологическая спектральная последовательность $E_r^{p,q}$, сопряженная к гомологической: ее член $E_\infty^{p,q}$ равен $H^i_{(p-1)}(X)/H^i_{(p)}(X)$, $i = p + q$. Для нее верны все те же факты, что и раньше, только с точностью до перехода к сопряженным объектам. В частности, член E_2 когомологической спектральной последовательности гомологически простого расслоения задается формулой

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(B, H^q(F)). \tag{2}$$

2. Умножение в когомологической спектральной последовательности расслоения. Как уже известно, группы когомологий с коэффициентами в кольце сами обладают структурой кольца. В частности, группы в правой части формулы (2) участвуют в такой структуре: имеется естественное умножение

$$H^p(B, H^q(F)) \otimes H^{p'}(B, H^{q'}(F)) \to H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F)). \tag{3}$$

Аналогичное умножение имеет место и для всех последующих членов E_r когомологической спектральной последовательности расслоения. А именно, для любого $r \geq 2$ однозначно определено умножение

$$E_r^{p,q} \otimes E_r^{p',q'} \to E_r^{p+p',q+q'}, \tag{4}$$

обладающее следующими свойствами.

2.1. Согласованность с умножением в члене E_2. Обсуждаемое сейчас умножение (4) сводится к обычному когомологическому умножению (3) посредством изоморфизмов (2).

2.2. Согласованность с когомологическим умножением в $H^*(E)$. Умножение в когомологиях пространства расслоения согласовано с фильтрацией, сдвинутой на 1: если $\alpha \in H^i_{(p)}(E)$, а $\beta \in H^j_{(p')}(E)$, то $\alpha \smile \beta \in H^{i+j}_{(p+p'+1)}(E)$. Это можно сказать еще и так: если $\alpha \in H^i_{(p-1)}(E)$, а $\beta \in H^j_{(p'-1)}(E)$, то $\alpha \smile \beta \in H^{i+j}_{(p+p'-1)}(E)$. Следовательно, возникает умножение соответствующих факторов

$$(H^i_{(p-1)}(E)/H^i_{(p)}(E)) \otimes (H^j_{(p'-1)}(E)/H^j_{(p')}(E)) \to H^{i+j}_{(p+p'-1)}(E)/H^{i+j}_{(p+p')}(E),$$

или, в наших терминах спектральной последовательности,

$$E_\infty^{p,q} \otimes E_\infty^{p',q'} \to E_\infty^{p+p',q+q'}, \tag{5}$$

где $q = i - p$, $q' = j - p'$.

Утверждается, что это – в точности обсуждаемое умножение (4) при $r = \infty$.

2.3. Ассоциативность и кососкоммутативность. Слово "ассоциативность" не нуждается в пояснениях, а кососкоммутативность означает, что для любых $\alpha \in E_r^{p,q}$ и $\beta \in E_r^{p',q'}$ имеем

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{(p+q)(p'+q')} \beta \smile \alpha.$$

2.4. Формула Лейбница. Для любых $\alpha \in E_r^{p,q}$ и $\beta \in E_r^{p',q'}$,

$$\partial_r(\alpha \smile \beta) = (\partial_r(\alpha)) \smile \beta + (-1)^{(p+q)} \alpha \smile (\partial_r(\beta)) \in E_r^{p+p'+r,q+q'-r+1}.$$

2.5. Наследственность. Пусть $\alpha \in E_r^{p,q}$ и $\beta \in E_r^{p',q'}$, причем и α и β принадлежат ядру отображения ∂_r, а следовательно определяют некоторые элементы $\tilde\alpha \in E_{r+1}^{p,q}$ и $\tilde\beta \in E_{r+1}^{p',q'}$. Тогда в силу формулы Лейбница $\alpha \smile \beta$ также принадлежит ядру отображения ∂_r и определяет некоторый элемент в группе $E_{r+1}^{p+p',q+q'}$. Утверждается, что этот элемент равен элементу $\tilde\alpha \smile \tilde\beta$.

3. Пример: когомологии специальной унитарной группы.

Теорема 1. *Для любого натурального n имеется изоморфизм колец*

$$H^*(SU(n)) \sim H^*(S^3 \times S^5 \times \cdots \times S^{2n-1}). \tag{6}$$

Доказательство. Как и в лекции 8, рассмотрим расслоение $SU(n) \to S^{2n-1}$, сопоставляющее нормальному реперу его последний вектор. Слой этого расслоения равен $SU(n-1)$. Рассмотрим на этот раз когомологическую спектральную последовательность этого расслоения. Все ненулевые группы $E_2^{p,q} \sim H^p(S^{2n-1}, H^q(SU(n-1))$ этой последовательности находятся в двух столбцах $p = 0$ и $p = 2n-1$, и эти столбцы одинаковы: $E_2^{2n-1,q} \simeq E_2^{0,q} \simeq H^q(SU(n-1))$ для любого q. В силу предположения индукции, все группы $E_2^{0,q}$ порождены произведениями базисных элементов размерности $3, 5, \dots, 2n-3$, представленных в клетках $E_2^{0,3}, E_2^{0,5}, \dots, E_2^{0,2n-3}$ соответственно. Никакой из этих базисных элементов ни при каком гомоморфизме ∂_r, $r \geq 2$, не может перейти в ненулевой элемент второго столбца. В силу тождества Лейбница, отсюда следует, что и все остальные элементы столбца $p = 0$ при таких гомоморфизмах переходит в 0. Значит, спектральная последовательность стабилизируется в члене E_2: $E_\infty^{p,q} \simeq E_2^{p,q}$. Этого достаточно для доказательства *группового* изоморфизма (6). Остается еще доказать, что имеется такой *кольцевой* изоморфизм, то есть вся группа $H^*(SU(n))$ — свободная абелева, базис в которой составляют произведения каких-то элементов $a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$. Это — задача для самостоятельного продумывания.