Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На зачете разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 1

1. Найдите спектр оператора

$$T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (Tx)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{n-k}}{2^{k+1}}.$$

2. Компактен ли оператор

$$T\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Tf)(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy?$$

3. Оператор $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ действует по формуле

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots).$$

Найдите его спектр, точечный спектр, непрерывный спектр, остаточный спектр и существенный спектр.

4. Пусть X — банахово пространство.
1) Может ли ограниченный оператор в X обладать окрестностью в $\mathscr{B}(X)$, целиком состоящей из необратимых операторов?
2) Может ли компактный оператор в X обладать окрестностью в $\mathscr{B}(X)$, целиком состоящей из необратимых операторов?

5. 1) Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Докажите, что

$$\bigcap_{K \in \mathscr{K}(X)} \sigma(T+K) = \sigma(T) \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\mathbf{1} \text{ фредгольмов и } \operatorname{ind}(T - \lambda\mathbf{1}) = 0\}.$$

2) Может ли множество из п.1 быть пустым для бесконечномерного X?
3) Оператор $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ действует по формуле

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, x_3, \frac{x_4}{4}, \dots, x_{2n-1}, \frac{x_{2n}}{2n}, \dots\right).$$

Найдите для него множество из п.1 и укажите явно последовательность (K_n) компактных операторов, для которой это множество равно $\bigcap_n \sigma(T + K_n)$.

6 (*банаховы представления алгебры Гейзенберга*)**.** Пусть A — банахова алгебра, содержащая элементы x, y, z, удовлетворяющие соотношениям $[x,y] = z$, $[x,z] = [y,z] = 0$. Докажите, что z квазинильпотентен.

Указание: вычислите $D^k(y^n)$, где $D(a) = [x,a]$.

Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 4 задачи. В случае решения бóльшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На зачете разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается пользоваться книгами и не разрешается общаться.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 2

1. Найдите спектр оператора

$$T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (Tx)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x_{n+k}.$$

2. Компактен ли оператор

$$T\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Tf)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \int\limits_0^x f(y)\,dy & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0? \end{cases}$$

3. Оператор $T\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ действует по формуле

$$(Tf)(z) = z\left(f(z) - \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\,d\zeta\right).$$

Найдите его спектр, точечный спектр, непрерывный спектр, остаточный спектр и существенный спектр.

Указание: разрешается пользоваться тем, что существенный спектр оператора умножения на непрерывную функцию равен его спектру и равен множеству значений функции.

4. Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Предположим, что $f(T) \in \mathscr{K}(X)$ для некоторого многочлена $f \in \mathbb{C}[t]$. Докажите, что $\operatorname{ind}(T - \lambda\mathbf{1}) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(T)$.

5. 1) Пусть X — банахово пространство, $T \in \mathscr{B}(X)$ и $K \in \mathscr{K}(X)$. Докажите, что если $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, то $\lambda \in \sigma(T + K)$.
2) Пусть T — оператор двустороннего сдвига в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ и $K \in \mathscr{K}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Докажите, что $\sigma(T + K)$ — это объединение единичной окружности $\mathbb{T}$ и некоторого множества собственных значений оператора $T + K$, имеющих конечную кратность.
3) Для оператора T из п.2 постройте такой одномерный оператор K, что $\sigma(T + K)$ — это замкнутый единичный круг $\overline{\mathbb{D}}$.

6 (*квантовый тор*)**.** Пусть A — $\mathbb{C}$-алгебра с единицей, порожденная двумя обратимыми элементами x, y, подчиненными соотношению $xy = qyx$, где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Докажите, что при $|q| \neq 1$ на A не существует субмультипликативных полунорм, кроме тождественно нулевой.

Указание: достаточно доказать, что в банаховой алгебре таких элементов нет.