Задачи по комплексному анализу 5, 12.4.2011–26.4.2011

1. Напомним, что $\theta(z,\tau)=\theta_{00}(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\pi i(n^2\tau+2nz))$,
$\theta_1(z,\tau)=\theta_{11}(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\pi i[(n+\frac{1}{2})^2\tau+2(n+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})])$ (нечетная по z функция),
$\theta_0(z,\tau)=\theta_{01}(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\pi i(n^2\tau+2n(z+\frac{1}{2}))=\theta(z+\frac{1}{2},\tau)$,
$\theta_{10}(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(\pi i[(n+\frac{1}{2})^2\tau+2(n+\frac{1}{2})z])=\theta_{11}(z-\frac{1}{2},\tau)$. Докажите, что

a) $\frac{d^2\log\theta_{11}(\tau z,\tau)}{dz^2}-\frac{d^2\log\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau})}{dz^2}=c(\tau)$ (не зависит от z); b) $\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau})=\alpha_1(\tau)\exp(\beta(\tau)z^2+\gamma(\tau)z)\theta_{11}(\tau z,\tau)$;
c) из нечетности θ_{11} следует $\gamma(\tau)\equiv 0$, а из совпадения мультипликаторов левой и правой части при $z\mapsto z+1$ и $z\mapsto z+\tau$ следует $\beta(\tau)=\pi i\tau$; таким образом, $\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau})=\alpha_1(\tau)\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{11}(\tau z,\tau)$;
d) аналогично, $\theta(z,\frac{-1}{\tau})=\alpha_0(\tau)\exp(\pi i\tau z^2)\theta(\tau z,\tau)$.

2. Докажите, что a) преобразование Фурье функции $f(x)=\exp(-\pi a x^2)$ равняется $\mathcal{F}f(y)=a^{-1/2}\exp(-\pi y^2/a)$; b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi a n^2)=a^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi n^2/a)$.

3. Докажите, что a) в обозначениях первой задачи для τ чисто мнимого $\alpha_0(iy)=\sqrt{y}$, а стало быть, $\theta(z,\frac{-1}{\tau})=\sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta(\tau z,\tau)$; b) $\theta_{01}(z,\frac{-1}{\tau})=\sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{10}(\tau z,\tau)$;
c) $\theta_{01}(\tau z,\tau)=\sqrt{i/\tau}\exp(-\pi i\tau z^2)\theta_{10}(z,\frac{-1}{\tau})$; d) $\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau})=-i\sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{11}(\tau z,\tau)$, короче говоря, $\theta_{\delta\varepsilon}(z,\frac{-1}{\tau})=(-i)^{\delta\varepsilon}\sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{\varepsilon\delta}(z\tau,\tau)$; e) $\theta_{1\varepsilon}(z,\tau+1)=\exp(\pi i/4)\theta_{1\varepsilon}(z,\tau)$; f) $\theta_{0\varepsilon}(z,\tau+1)=\theta_{0,1-\varepsilon}(z,\tau)$.

4. Докажите, что группа дробно-линейных преобразований $SL(2,\mathbb{Z})$ порождена преобразованиями $S(\tau)=-1/\tau,\ T(\tau)=\tau+1$, причем $S^2=(ST)^3=1$.

5. Докажите, что для тэта-констант $\theta_{00}(\tau):=\theta_{00}(0,\tau),\ \theta_{01}(\tau):=\theta_{01}(0,\tau),\ \theta_{10}(\tau):=\theta_{10}(0,\tau)$ выполняется следующее свойство модулярности: пусть $f(\tau)=\theta_{00}^8(\tau)+\theta_{01}^8(\tau)+\theta_{10}^8(\tau)$. Тогда $f(\tau)=(cz+d)^{-4}f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$ для любой матрицы из $SL(2,\mathbb{Z})$.