

Задачи по группам и алгебрам Ли – 5 $\frac{1}{2}$

Это дополнительный листок.

1. **а)** Выпишите (в каких-нибудь координатах) инвариантную форму объема на группе Ли SU_2 ; **б)** лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Ли SU_2 .
2. **а)** Найдите все римановы метрики на псевдосфере $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, инвариантные относительно группы Ли $SO_{2,1}(\mathbb{R})$. **б)** Найдите все римановы метрики на “конусе будущего” $t^2 \geq x^2 + y^2 + z^2$, инвариантные относительно группы Лоренца $SO_{3,1}(\mathbb{R})_0$.
3. **а)** Постройте сюръективный гомоморфизм $SU_2 \times SU_2 \rightarrow SO_4(\mathbb{R})$ (*Указание:* операторы левого и правого умножения на единичные кватернионы сохраняют евклидово скалярное произведение в пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}\{1, i, j, k\}$). **б)** Найдите $\pi_1(SO_4(\mathbb{R}))$. **в)** Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}_4(\mathbb{R})$ изоморфна $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$, а $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})$ изоморфна $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$.
4. **а)** Постройте сюръективный гомоморфизм $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow SO_{2,2}(\mathbb{R})$, найдите его ядро и докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}_{2,2}(\mathbb{R})$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. (*Указание:* операторы левого и правого умножения на элементы группы $SL_2(\mathbb{R})$ в пространстве $Mat_2(\mathbb{R})$ сохраняют квадратичную форму, заданную определителем). **б)** Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}_{3,1}(\mathbb{R})$ проста и изоморфна $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Как связаны соответствующие группы Ли?
5. **а)** Покажите, что следующие дифференциальные операторы на \mathbb{R}^3 коммутируют с действием группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$ и образуют алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$: $e = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, $f = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$, $h = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{3}{2}$. **б)** Докажите, что $\mathbb{R}[x, y, z] = \text{Im } e \oplus \text{Ker } f$. **в)** Разложите в прямую сумму неприводимых представление группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$ в пространстве функций на двумерной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.