Самостоятельная работа 6.

Самостоятельная работа должна быть сдана в четверг 14.04 ПЕРЕД семинаром по алгебре.

Номер варианта = 1 + (остаток от деления на 25 числа $N + \mathit{Ф} \cdot \mathit{И}$**)**, где N — это номер студента в алфавитном списке курса, $\mathit{Ф}$ — число букв в фамилии, а $\mathit{И}$ — число букв в имени.

Задача 1

1) Пусть $G \subseteq S_n$ подгруппа, порожденная перестановками α и β. Найти $|G|$. Коммутативна ли она? Какой из известных групп (или прямому произведению известных групп) она изоморфна? Если эта группа коммутативна, представьте ее в виде прямого произведения примарных циклических групп.
2) Является ли подгруппа группы G, порожденная элементом α, нормальной подгруппой в G? Если да, найти фактор-группу по ней.
3) То же задание для подгруппы, порожденной элементом β.

N	n	α	β	N	n	α	β
1	8	(1326)(4578)	(1427)(3865)	13	6	(132)	(645)
2	7	(134)	(567)	14	5	(25)(34)	(12)(35)
3	5	(12345)	(25)(34)	15	6	(162)(345)	(62)(34)
4	9	(12345)	(67)	16	6	(123456)	(14)(25)(36)
5	5	(12345)	(14253)	17	8	(1234)(57)	(68)
6	6	(1234)(56)	(13)	18	7	(64125)	(65)(24)(37)
7	8	(123)(456)	(78)	19	8	(12345678)	(14)(58)(23)(67)
8	5	(12345)	(13524)	20	9	(12345)	(67)(89)
9	6	(1243)	(14)(56)	21	5	(453)	(45)(12)
10	5	(15)	(53)(24)	22	6	(1234)	(13)(24)(65)
11	9	(4753)(2196)	(4259)(7631)	23	6	(12356)	(32)(15)
12	7	(1234)(567)	(1432)	24	8	(14)(7865)	(5687)
				25	9	(123)(456)	(798)

Задача 2

Пусть G множество матриц $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$, удовлетворяющих некоторым условиям. Доказать, что G является подгруппой. Найти $|G|$. Коммутативна ли она? Какой из известных групп (или прямому произведению известных групп) она изоморфна? Если эта группа коммутативна, представьте ее в виде прямого произведения примарных циклических групп.

N	n	p	Условие на матрицы A
1	2	3	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_3)$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, удовлетворяющие условию $\det A = 1$.
2	2	5	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3	2	3	Матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
4	2	3	$\mathrm{O}(2,\mathbb{F}_3)$ — ортогональные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, т.е. $AA^t = E$.
5	2	3	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
6	2	7	Матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_7)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
7	3	2	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2)$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.
8	2	5	Матрицы $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $ab = 1$ и $cd = -1$.
9	3	3	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_3)$ вида $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
10	2	5	Матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, удовлетворяющие условию $\det A = \pm 1$.
11	2	7	Матрицы $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_7)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, т.е удовлетворяющие условию $\det A = 1$.
12	3	2	$\mathrm{O}(3,\mathbb{F}_2)$ — ортогональные матрицы $A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2)$, т.е. $AA^t = E$.
13	2	5	$\mathrm{O}(2,\mathbb{F}_5)$ — ортогональные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_5)$, т.е. $AA^t = E$.
14	2	5	Матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
15	2	11	Матрицы $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_{11})$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, т.е удовлетворяющие условию $\det A = 1$.
16	2	11	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_{11})$ вида $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
17	2	3	Матрицы $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$ т.е. $ab = 1$ и $cd = 1$.

18	2	7	Матрицы $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, т.е удовлетворяющие условию $\det A = 1$.
19	2	3	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
20	2	7	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7)$ вида $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
21	2	11	Матрицы $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_{11})$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, т.е удовлетворяющие условию $\det A = 1$.
22	4	2	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{F}_2)$ вида $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
23	2	7	Матрицы $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, т.е удовлетворяющие условию $\det A = 1$.
24	2	7	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7)$ вида $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
25	2	5	Верхнетреугольные матрицы $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_5)$ вида $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3

1) Какой цикленный тип могут иметь элементы порядка k в S_n? Какие из них четные, а какие нечетные? Выпишите по одной перестановке каждого типа и найдите количество перестановок каждого типа.
2) Для одной из выписанных перестановок α найти множество перестановок β, перестановочных с α (т.е. таких, что $\alpha\beta = \beta\alpha$). Доказать, что это группа, найти ее порядок и определить, какой из известных групп групп (или прямому произведению известных групп) она изоморфна.

N	n	k	N	n	k	N	n	k
1	18	7	9	8	6	17	19	7
2	8	4	10	17	7	18	11	8
3	12	8	11	6	6	19	6	4
4	7	3	12	6	3	20	13	5
5	9	10	13	10	5	21	10	8
6	11	5	14	13	8	22	15	7
7	7	6	15	7	4	23	5	2
8	9	4	16	8	3	24	10	10
						25	9	12