Глава 6

Разбиения

6.1 Разбиения и разложения

Найдем, сколькими способами можно представить число n в виде суммы неотрицательных слагаемых.

Два представления

$$n = a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_k$$

будем считать различными, если $a_i \neq b_i$ хотя бы для одного индекса i, $1 \leq i \leq k$. Такое представление числа n будем называть его *разложением*.

Утверждение 6.1.1. *Число различных разложений числа n в сумму k целых неотрицательных слагаемых равно $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

Доказательство. Представим себе число n в виде набора из n одинаковых шариков, лежащих на прямой. Каждому разложению числа n в сумму k слагаемых сопоставим расстановку $k-1$ палочек между шариками. Палочки занумерованы слева направо числами от 1 до $k-1$. Элемент a_i разложения равен числу шариков между палочками с номерами $i-1$ и i. Вместе палочки и шарики составляют $n+k-1$ предмет. При этом назначить $k-1$ предмет палочками можно ровно $\binom{n+k-1}{k-1}$ различными способами. Утверждение доказано.

Несложно выписать и производящую функцию для числа разложений. По сути дела, мы уже сделали это в первой главе.

Утверждение 6.1.2. *Производящая функция для числа разложений на k слагаемых имеет вид*

$$B_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} s^n = (1-s)^{-k}.$$

Сложнее подсчитать число разбиений числа n. *Разбиением* мы будем называть класс эквивалентности разложений, ни одно из слагаемых в которых не равно нулю. При этом два разложения считаются эквивалентными, если одно можно получить из другого перестановкой слагаемых.

Вот все разбиения маленьких чисел:

$n=1$	1	
$n=2$	2	=1+1
$n=3$	3	=2+1=1+1+1
$n=4$	4	=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1
$n=5$	5	=4+1=3+2=3+1+1
		=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1

Обратите внимание на то, что каждое разбиение в таблице записано в порядке убывания слагаемых.

Обозначив число разбиений числа n через p_n, получаем таблицу начальных значений последовательности p_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	1	1	2	3	5	7	11	15	22

Наша ближайшая задача — найти производящую функцию для последовательности p_n. Для этого подсчитаем сначала число разбиений на части, удовлетворяющие некоторым ограничениям. Пусть $P_1(s)$ — производящая функция для разбиений на части, равные 1. Очевидно, что для каждого числа такое разбиение единственно, поэтому

$$P_1(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \frac{1}{1-s}.$$

Число разбиений числа n на части, равные 2, равно 1 для четных n и равно нулю в противном случае. Поэтому

$$P_2(s) = 1 + s^2 + s^4 + s^6 + \dots = \frac{1}{1-s^2}$$

— производящая функция, перечисляющая разбиения на части, равные 2.

Разбиения на части, не превосходящие двух, описываются производящей функцией $P_1(s)P_2(s)$. Действительно, коэффициент при s^n в этом произведении равен количеству представлений числа n в виде суммы $n = k_1 + 2k_2$, т.е. числу разбиений числа n на k_1 единиц и k_2 двоек. Тем самым, производящая функция для разбиений на части, не превосходящие двух, имеет вид

$$P_1(s)P_2(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)}.$$

Аналогично, разбиения на части, равные трем, перечисляются производящей функцией $P_3(s) = 1/(1-s^3)$, а разбиения на части, не превосходящие трех, описываются производящей функцией

$$P_1(s)P_2(s)P_3(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)}.$$

Продолжая это рассуждение, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 6.1.3 (Эйлер). *Производящая функция для числа разбиений числа n имеет вид*

$$P(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)(1-s^4)\dots}. \tag{6.1}$$

Для того, чтобы придать утверждению теоремы смысл, необходимо пояснить, что понимается под бесконечным произведением, стоящим в знаменателе правой части равенства (6.1). Это произведение должно быть формальным степенным рядом

$$Q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots = (1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots. \tag{6.2}$$

Для того, чтобы сказать, чему равны коэффициенты $q_0, q_1, q_2, \dots$ бесконечного произведения, посмотрим сначала на конечные произведения:

$$\begin{array}{rcllllll}
1-s & = & \mathbf{1-s} & & & & & \\
(1-s)(1-s^2) & = & \mathbf{1-s} & \mathbf{-s^2} & +s^3 & & & \\
(1-s)(1-s^2)(1-s^3) & = & \mathbf{1-s} & \mathbf{-s^2} & & +s^4 & +s^5 & -s^6 \\
(1-s)\dots(1-s^4) & = & \mathbf{1-s} & \mathbf{-s^2} & & & +2s^5 & +\dots \\
(1-s)\dots(1-s^5) & = & \mathbf{1-s} & \mathbf{-s^2} & & & \mathbf{+s^5} & +\dots
\end{array}$$

Видно, что коэффициенты в этих конечных произведениях "стабилизируются" — начиная с некоторого момента перестают изменяться (стабилизирующиеся члены разложения выделены). Это и неудивительно: умножение на $1 - s^k$ не меняет коэффициентов многочлена при степенях, меньших k. Поэтому мы можем просто положить q_k равным коэффициенту при s^k в многочлене $(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^k)$.

Теперь мы можем выписать аналогичные бесконечные произведения и для разбиений с различными ограничениями.

Так, число разбиений на различные слагаемые дается производящей функцией

$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots,$$

производящая функция для разбиений на различные нечетные слагаемые имеет вид

$$(1+s)(1+s^3)(1+s^5)\dots,$$

а разбиения на произвольные нечетные слагаемые перечисляются производящей функцией

$$\frac{1}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots},$$

и т.д.

Разбиения тесно связаны с алгеброй многочленов. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ от бесконечного числа переменных. Будем считать, что переменной x_i приписан вес i и что при перемножении переменных их веса складываются. Подсчитаем число мономов веса n, т.е. размерность пространства однородных многочленов веса n.

При $n = 1$ такой моном всего один — это моном x_1. При $n = 2$ имеется два монома веса n — это x_1^2 и x_2. Число мономов веса 3 равно трем, это x_1^3, x_1x_2 и x_3. Вообще, число мономов веса n равно p_n. Действительно, каждому моному веса n можно сопоставить разбиение числа n по следующему правилу: число слагаемых i в разбиении равно степени вхождения переменной x_i в моном. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно.

Вот полезная геометрическая интерпретация разбиений. Каждое разбиение удобно представлять в виде *таблицы Ферре* или *таблицы Юнга* (рис. 6.1). Изображенные на этом рисунке таблицы соответствуют разбиению $5+4+4+2+1$ числа 16. Каждая строчка таблицы содержит столько элементов, каково соответствующее слагаемое разбиения.

Используя таблицы Ферре или Юнга, можно доказывать различные свойства разбиений. Например, на таблицах Юнга действует естественная

Рис. 6.1: Таблицы Ферре а) и Юнга б)

инволюция — отражение относительно диагонали. Некоторые таблицы при таком отражении переходят в себя (см. рис. 6.2). Такие таблицы (и соответствующие им разбиения) будем называть *симметричными.*

Рис. 6.2: Симметричная таблица Юнга а) и центральные крюки в ней б)

Докажем следующее свойство симметричных разбиений.

Утверждение 6.1.4. *Число симметричных разбиений числа* n *равно числу его разбиений на различные нечетные слагаемые.*

Доказательство. Для доказательства поставим в соответствие каждой симметричной таблице таблицу, составленную из ее “центральных крюков” (см. рис. 6.2 б)). Число клеток в каждом центральном крюке симметричной таблицы нечетно, и эти числа попарно различны. Наоборот, взяв таблицу, составленную из строк различной нечетной длины, мы можем “сломать” каждую такую строчку посередине и составить из получившихся крюков симметричную диаграмму.

6.2 Тождество Эйлера

Производящая функция Q, задаваемая равенством (6.2), оказывается очень интересной. Эйлер продолжил вычисление ее коэффициентов и получил

$$\begin{aligned} Q(s) &= 1 - s - s^2 + s^5 + s^7 - s^{12} - s^{15} + s^{22} + s^{26} \\ &\quad - s^{35} - s^{40} + s^{51} + s^{57} - s^{70} - s^{77} + s^{92} + s^{100} - \ldots \end{aligned}$$

Видно, что среди коэффициентов в вычисленных членах встречаются только нули, единицы и минус единицы. Ненулевые коэффициенты стоят на некоторых вполне определенных местах и знаки при единицах попарно чередуются. Эти наблюдения привели Эйлера к гипотезе, которую мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6.2.1 (Тождество Эйлера)**.**

$$Q(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(s^{\frac{3k^2-k}{2}} + s^{\frac{3k^2+k}{2}} \right).$$

Доказательство. При раскрытии скобок ряд

$$Q(s) = (1-s)(1-s^2)(1-s^3)\ldots$$

содержит те же члены, что и ряд для числа разбиений с различными слагаемыми

$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\ldots.$$

Однако некоторые члены при этом входят со знаком плюс, а некоторые со знаком минус. Знак плюс имеют члены, соответствующие разбиениям на четное число слагаемых, а знак минус — члены, отвечающие разбиениям на нечетное число слагаемых. Мы докажем, что число разбиений числа n на четное и нечетное число слагаемых одинаково для всех значений n кроме некоторых исключительных.

Представим каждое разбиение в виде таблицы Юнга. Важную роль в доказательстве будут играть нижняя строчка таблицы и ее "боковая диагональ" (см. рис. 6.3).

Пусть l —длина нижней строчки, d — длина диагонали, k — число строчек в таблице, т.е. число слагаемых в разбиении. Определим отображение множества таблиц, все строчки в которых имеют разную длину, в себя следующим образом:

- если $l < d$, то отрежем от таблицы нижнюю строчку и приклеим ее к диагонали;
- если $l = d < k$, то проделаем то же самое;

Рис. 6.3: Нижняя строчка и боковая диагональ таблицы Юнга

- если $l > d$ и $k > l$, то наоборот, отрежем диагональ и приклеим ее ниже нижней строчки.

С остальными (исключительными) таблицами не будем делать ничего.

Наше отображение меняет четность числа строк в таблице, т.е. четность числа слагаемых в разбиении, для всех неисключительных диаграмм. Поэтому если неисключительных таблиц с числом клеток n нет вообще, то коэффициент при s^n в разложении $Q(s)$ равен нулю.

Исключительные диаграммы выделяются условиями

$$k = l = d \text{ или } k = d,\ l = k + 1.$$

В первом случае имеем

$$n = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (2k-1) = \frac{3k^2 - k}{2};$$

во втором —

$$n = (k+1) + (k+2) + \cdots + 2k = \frac{3k^2 + k}{2}.$$

В каждом из этих случаев исключительная диаграмма единственна. Тождество Эйлера доказано.

Тождество Эйлера дает эффективный способ вычисления числа разбиений числа n. Именно, справедливо следующее рекуррентное соотношение.

Утверждение 6.2.2.

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - \dots.$$

Действительно, это очевидное следствие равенства

$$P(s)Q(s) = 1.$$

Полученное рекуррентное соотношение нашло замечательное применение в “линейке Фукса”[1].

[1] Квант, 8 (1981), с. 15

“Эта формула позволяет быстро составить довольно длинную таблицу чисел p_n. Вот практический совет, как это сделать. Возьмите лист клетчатой бумаги — лучше всего двойной тетрадный лист. Отрежьте вдоль его длинной стороны полоску шириной 3-4 клетки. Положите эту полоску перед собой вертикально и у левого среза в нижней клетке поставьте какой-нибудь знак, скажем звездочку. Затем, двигаясь вверх, поставьте в первой клетке $+$, во второй $+$, в пятой $-$, в седьмой $-$, в двенадцатой $+$, в пятнадцатой $+$ и т.д., насколько хватит длины полоски. Оставшуюся часть листа так же положите перед собой вертикально и, отступя 10-15 клеток от ее левого среза, проведите на ней вертикальную черту — сверху донизу. В клетки, прилегающие к черте слева, двигаясь сверху вниз, впишите известные вам числа p_n, начиная с p_0: 1, 1, 2, 3, 5, 7. Чтобы найти следующее значение, приложите отрезанную полоску справа к вертикальной черте так, чтобы звездочка оказалась против первой пустой клетки. Теперь из суммы чисел, стоящих против плюсов, вычтите сумму чисел, стоящих против минусов. Что получится — впишите в клетку против звездочки: это следующее значение функции p_n. Опустите полоску на одну клетку вниз и повторите то же самое. И так далее. Через несколько минут вы получите колонку чисел p_n высотой в ваш лист.”

6.3 Разбиения множеств в треугольнике Моцкина с кратностями

Разбиения множеств легче поддаются описанию, чем разбиения чисел.

Рассмотрим множество $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ натуральных чисел от 1 до n. *Разбиением* множества N_n называется его представление в виде объединения непустых непересекающихся подмножеств. Например, множество N_3 допускает пять разбиений:

$$\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\},\ \{\{2,3\},\{1\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\}.$$

Число разбиений множества N_n обозначим через $\tilde{p}_n$ и займемся изучением производящей функции

$$\widetilde{P}(s) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_2 s^2 + \dots$$

(мы полагаем, по определению, $\tilde{p}_0 = 1$).

Каждому разбиению множества N_n можно естественным образом сопоставить разбиение числа n. Для этого нужно представить n в виде суммы количеств элементов в каждом из множеств разбиения. Нетрудно подсчитать и число разбиений множества N_n, отвечающих данному разбиению

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

числа n. Элементы первого множества можно выбрать $\binom{n}{n_1}$ способами; после этого элементы второго множества можно выбрать $\binom{n-n_1}{n_2}$ способами и т.д. Всего разбить элементы множества N_n по множествам с $n_1, n_2, \ldots, n_k$ элементами можно

$$\begin{aligned}\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \quad \ldots \quad & \binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \\ = \quad & \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!} \\ = \quad & \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \\ = \quad & \binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k}.\end{aligned}$$

Полученное выражение называется *мультиномиальным коэффициентом*. Оно обобщает биномиальный коэффициент — число сочетаний. Как нетрудно видеть, мультиномиальный коэффициент представляет собой коэффициент при $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ в разложении многочлена $(x_1+\cdots+x_k)^n$:

$$(x_1+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=0\\ n_1+\cdots+n_k=n}}^{n} \binom{n}{n_1\ \ldots\ n_k} x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}.$$

Однако число разбиений множества N_n, отвечающих данному разбиению числа n, не совпадает в точности с мультиномиальным коэффициентом. Дело в том, что множества разбиения, содержащие одинаковое количество элементов, можно переставлять между собой. Поэтому правильный ответ имеет вид

$$\frac{1}{m_1!\ldots m_n!}\binom{n}{n_1\ \ldots\ n_k},$$

где m_i — это число элементов разбиения, равных i.

Каждому разбиению множества N_n на подмножества сопоставим путь в треугольнике Моцкина по следующему правилу. Пусть элемент $i \in N_n$ входит в некоторое подмножество разбиения. Тогда i-й отрезок пути будет горизонтальным, если либо соответствующее подмножество состоит из одного элемента i, либо элемент i не является в подмножестве ни минимальным, ни максимальным элементом. i-й отрезок пути будет вектором подъема $(1,1)$, если элемент i — минимальный в своем подмножестве, и он будет вектором спуска $(1,-1)$, если соответствующий элемент максимален. Начальная точка пути находится, как обычно, в точке $(0,0)$. На рис. 6.4 изображены разбиение множества N_{10} и путь в треугольнике Моцкина, соответствующий этому разбиению.

Ясно, что для каждого разбиения путь, отвечающий ему, является правильным: он лежит в положительной полуплоскости и заканчивается на высоте 0. Действительно, среди первых m элементов множества N_n число максимумов не может превосходить числа минимумов ни при каком m.

Подсчитаем, сколько разбиений соответствует данному пути. Пусть начальная часть пути, состоящая из i отрезков, заканчивается на высоте j, и

Рис. 6.4: Путь в треугольнике Моцкина, отвечающий разбиению множества

предположим, что первые j элементов уже разбиты на подмножества. Если $(j+1)$-й отрезок пути представляет собой вектор подъема $(1,1)$, то элемент $j+1$ является минимумом нового подмножества разбиения, никаких других возможностей нет. Поэтому кратность соответствующего ребра равна 1. Если это горизонтальный вектор, то отвечающий ему элемент может либо входить в одно из уже существующих множеств (таких возможностей ровно j, так как ровно в j имеющихся множествах еще не зафиксирован максимальный элемент), либо образовывать одноэлементное множество. Поэтому кратность горизонтального ребра равна $j+1$. Кратность вектора спада $(1,-1)$ равна j, так как соответствующий ему элемент может быть максимальным в одном из j подмножеств. Соответствующая расстановка кратностей на ребрах в треугольнике Моцкина изображена на рис. 6.5.

Рис. 6.5: Расстановка кратностей на ребрах, отвечающая производящей функции разбиений

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3.1. *Число $\tilde{p}_n$ разбиений множества N_n на непустые подмножества равно числу правильных путей в треугольнике Моцкина с кратностями, изображенном на рис. 6.5.*

6.4 Задачи

Задача 6.1. Сколькими способами можно разменять рубль на монеты в 1, 2, 5, 10, 20 и 50 копеек?

Задача 6.2. Сколькими способами можно взвесить 78 г с помощью разновесок 1, 1, 2, 5, 10, 20, 50 г на

а) одночашечных весах;

б) двухчашечных весах?

(Применение двух различных разновесок одного веса дает различные взвешивания).

Задача 6.3. Найдите

$$(1+qs)(1+qs^2)(1+qs^3)\dots.$$

Задача 6.4. Всякое число может быть единственным образом записано в десятичной системе счисления. Поэтому

$$(1+s+s^2+\dots+s^9)(1+s^{10}+\dots+s^{90})\dots=\frac{1}{1-s}.$$

Докажите.

Задача 6.5. Докажите, что число разбиений числа n на части, не превосходящие m, равно числу его разбиений на не более чем m частей.

Задача 6.6. Докажите, что

$$(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots=\frac{1}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots}.$$

Задача 6.7. Докажите, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных целых положительных слагаемых стольких же способами, сколькими его можно представить в виде суммы нечетных (может быть и совпадающих) слагаемых.

Задача 6.8. Докажите тождества Гаусса

- а) $\frac{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots}{(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots}=1-2s+2s^4-2s^9+\dots;$
- б) $\frac{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)\dots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots}=1+s+s^3+s^6+s^{10}+\dots.$

Задача 6.9. Докажите, что натуральное число n может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых $2^{n-1}-1$ способом, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать различными.

Задача 6.10. Найдите производящую функцию для числа симметричных (самосопряженных) разбиений.

Задача 6.11. Рассмотрим кольцо многочленов от бесконечного набора переменных, в котором переменным приписан вес, причем число переменных веса i конечно для любого i. Обозначим это число через q_i. Выпишите производящую функцию для последовательности размерностей пространств однородных многочленов веса n.

Задача 6.12. Обозначим через σ_n сумму делителей числа n (включая 1 и само n); например, $\sigma_6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. Пусть $\Sigma(s)$ — производящая функция для последовательности σ_n,

$$\Sigma(s) = s + 3s^2 + 4s^3 + 7s^4 + 6s^5 + 12s^6 + \dots.$$

- а) Докажите, что
$$P(s) = sP'(s)\Sigma(s),$$
где $P(s)$ — производящая функция для числа разбиений.

- б) Выведите отсюда рекуррентное соотношение на числа σ_n.

Задача 6.13. Докажите, что последовательность p_n чисел разбиений растет монотонно и оцените скорость ее роста.

Задача 6.14. Докажите, что производящая функция для числа диаграмм Юнга по периметру равна $\frac{x^2}{1-2x}$.

Задача 6.15. *Квадратом Дюрфи* в диаграмме Юнга называется максимальный квадрат, вписанный в ее левый верхний угол. Для каждого $c \geq 1$ выпишите производящую функцию для числа диаграмм Юнга с квадратом Дюрфи $c \times c$ по числу квадратов в диаграмме.

Задача 6.16. Докажите, что число разбиений числа n на части, не делящиеся на m, равно числу тех его разбиений, в которых ни одна часть не встречается более, чем $m - 1$ раз.

Задача 6.17. Докажите, что число разбиений числа n, в которых более одного раза могут встречаться только части нечетной величины, совпадает с числом его разбиений, в которых ни одна часть не встречается более трех раз.

Задача 6.18. Покажите, что абсолютная величина разности между числом разбиений числа n на четное число частей и числом его разбиений на нечетное число частей равняется числу его разбиений с раз- личными частями нечетной величины.

Задача 6.19. Покажите, что число разбиений числа n, в которых не встречаются последовательные целые числа, равно числу его разбиений, в которых ни одна часть не появляется лишь по одному разу.

Задача 6.20. Покажите, что число таких разбиений числа n, в которых каждая часть встречается 2, 3 или 5 раз, равно числу его разбиений на части, сравнимые с 2, 3, 6, 9 или 10 по модулю 12.

Задача 6.21. Покажите, что число разбиений числа n, в которых ни одна часть не встречается лишь по одному разу, равняется числу его разбиений, которые не имеют частей, сравнимых с 1 или 5 по модулю 6.

Задача 6.22. Покажите, что число разбиений числа n, в которых наименьшая часть встречается лишь один раз, а наибольшая часть не более чем вдвое превосходит наименьшую, равняется числу его разбиений, в которых наибольшая часть нечетна, а наименьшая больше, чем половина наибольшей части.

Задача 6.23. Покажите, что сумма числа частей, равных 1, по всем разбиениям числа n равна сумме числа различных частей также по всем разбиениям n.

Задача 6.24. Докажите, что

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 1} \min(n_1,n_2,\ldots,n_k)t_1^{n_1}t_2^{n_2}\ldots t_k^{n_k} = \frac{t_1t_2\ldots t_k}{(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_k)(1-t_1t_2\ldots t_k)}.$$

Глава 7

Принцип включения-исключения и производящие функции Дирихле