20.1. Для каждого из следующих операторов T найдите их (гильбертово) сопряженные:
1) диагональный оператор в ℓ^2;
2) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^2(X,\mu)$;
3) операторы левого и правого сдвига в ℓ^2;
4) оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
5) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ (см. задачу 2.11);
6) оператор неопределенного интегрирования в $L^2[0,1]$ (см. задачу 2.10).

20.2. Какие из операторов предыдущей задачи самосопряженные? унитарные? нормальные? являются ортогональными проекторами?

20.3. Докажите, что
1) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{C}$ является спектром некоторого нормального оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
2) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}$ является спектром некоторого самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
3) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{T}$ является спектром некоторого унитарного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

20.4. Вычислите норму оператора неопределенного интегрирования в $L^2[0,1]$ (см. задачу 2.10).
Указание: оператор T^*T компактен и самосопряжен.

20.5. Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части коммутируют.

20.6. Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален тогда и только тогда, когда $\|Tx\| = \|T^*x\|$ для всех $x \in H$. Как следствие, если T нормален, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$ и $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$ (ортогональная прямая сумма).

20.7. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $x \in H$ и $Tx = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажите, что $T^*x = \bar{\lambda} x$.

20.8. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

20.9. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор. Докажите, что $r(T) = \|T\|$.
Указание: оператор T^*T самосопряжен.

20.10. Докажите, что остаточный спектр нормального оператора пуст.

20.11. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор и $H_0 \subset H$ — замкнутое T-инвариантное подпространство. Обязательно ли $H_0^\perp$ T-инвариантно?

20.12. Обобщите теорему Гильберта-Шмидта на случай компактных нормальных операторов.

20.13. Докажите, что любой компактный нормальный оператор в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен диагональному оператору в ℓ^2.

20.14. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $f \in L^2(X,\mu)$ и $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Рассмотрим однородное и неоднородное *интегральные уравнения Фредгольма*:

$$\varphi(x) + \int_X K(x,y)\varphi(y)\,d\mu(y) = 0; \tag{1}$$

$$\varphi(x) + \int_X K(x,y)\varphi(y)\,d\mu(y) = f(x) \tag{2}$$

относительно неизвестной функции $\varphi \in L^2(X,\mu)$. Докажите следующие *теоремы Фредгольма*:

I. Уравнение (2) разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны всем решениям *сопряженного* однородного уравнения

$$\varphi(x) + \int_X \overline{K(y,x)} \varphi(y)\, d\mu(y) = 0. \tag{3}$$

II (*альтернатива Фредгольма*). Справедливо одно из двух взаимоисключающих утверждений: либо уравнение (2) имеет одно и только одно решение для всех $f \in L^2(X,\mu)$, либо однородное уравнение (1) имеет ненулевое решение.

III. Однородные уравнения (1) и (3) имеют одно и то же, причем конечное, число линейно независимых решений.