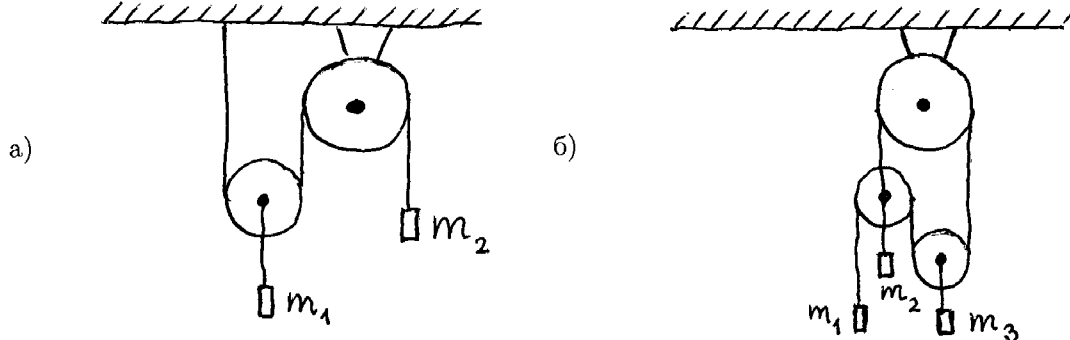


## Листок 14. Второй закон Ньютона. Фазовые портреты.

Задачи 1а), 2, 3, 4, 5, 6, 9а) составляют необходимый минимум в этом листке.

1. Определите закон движения грузов, полагая, что блоки невесомы, трение в осях блоков отсутствует, а нити невесомы и нерастяжимы.



2. Частица массы  $m$  движется в плоскости по дуге эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Ускорение частицы параллельно оси  $y$ . В начальный момент времени координаты частицы  $(x_0, y_0) = (0, b)$ , величина начальной скорости  $v_0$ . Определите силу, действующую на частицу в каждой точке ее траектории.
3. На гладкой горизонтальной поверхности лежит клин массы  $M$ , на который кладут брусок массы  $m$ . Найдите закон движения бруска и клина, считая что трение отсутствует.
4. Перевернутый клин опирается вертикальной стороной на вертикальную стену, а наклонной плоскостью на стоящий на горизонтальной поверхности куб. Массы клина и куба, соответственно,  $m$  и  $M$ , угол при основании клина –  $\alpha$ . Определите закон движения клина в отсутствие трения.

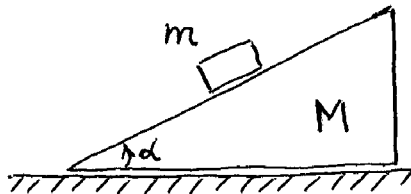


Рис. к задаче 3.

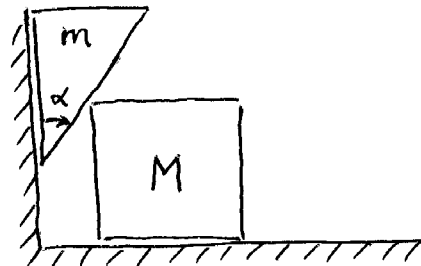


Рис. к задаче 4.

5. Найдите закон движения частицы в поле потенциала  $U(x) = -Ax^4$ , если ее энергия равна нулю.
6. Нарисуйте фазовые портреты движения частицы в полях потенциалов  
 а)  $U(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}$ , б)  $U(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$ , в)  $U(x) = -(\operatorname{ch} x)^{-2}$ , г)  $U(x) = (\tan x)^2$ .
7. Докажите, что время движения частицы между точками  $a$  и  $b$  обращается в бесконечность при приближении ее энергии к значению максимума  $U_0$  потенциала.

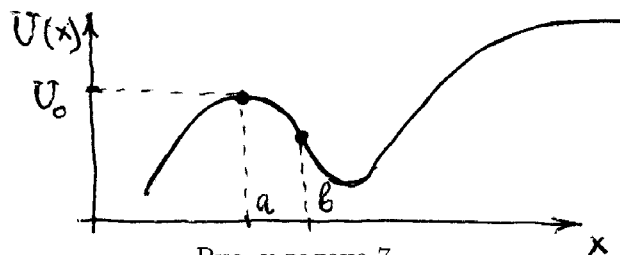
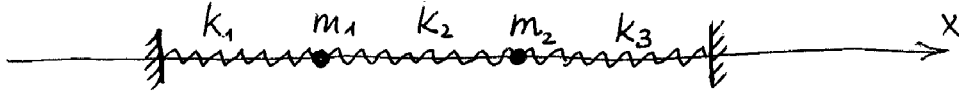


Рис. к задаче 7.

8. Пусть  $S(E)$  — площадь, заключенная внутри замкнутой фазовой кривой. Докажите, что период движения частицы массы  $m$  по этой кривой равен  $m \frac{dS}{dE}$ .

9. Цепочка гармонических осцилляторов.

а) Определите нормальные колебания (т.е., фундаментальную систему решений) системы двух массивных частиц, движущихся по прямой, и скрепленных пружинами со стенками и между собой.



б) Тот же вопрос для цепочки из  $n$  частиц одинаковой массы  $m$ , скрепленных со стенками и между собой пружинами с одинаковым коэффициентом жесткости  $k$ . (Указание: убедитесь, что квадраты частот нормальных колебаний цепочки связаны с корнями многочленов Чебышева 2 рода:  $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ ,  $U_0(x) = 1$ ,  $U_1(x) = 2x$ ,  $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ ).

10. Камень, лежащий на вершине гладкого полусферического купола радиуса  $R$ , получив начальную горизонтальную скорость  $v_0$ , движется под действием силы тяжести.

а) При каком значении начальной скорости камень сойдет с купола в начальный момент?

б) В какой точке камень покинет купол?

11. К середине натянутой горизонтально струны подвешивают грузик, под тяжестью которого струна провисает на величину  $\delta$ , много меньшую своей длины. Определите частоту малых гармонических колебаний грузика, полагая, что сила натяжения струны пропорциональна ее растяжению, и что до подвешивания грузика

а) струна была натянута с некоторой силой;

б) струна не испытывала натяжения.

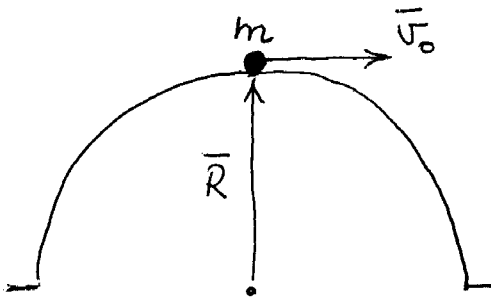


Рис. к задаче 10.

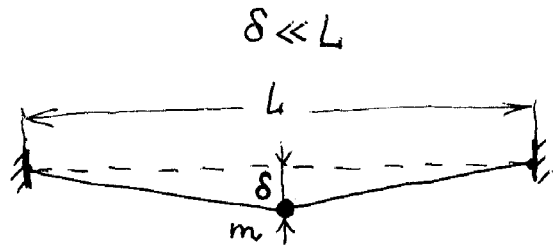


Рис. к задаче 11.