Задачи по группам и алгебрам Ли – 6

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. а) Докажите, что на любой группе Ли G существует левоинвариантная мера (дифференциальная форма старшей степени). **б)** Докажите, что если группа Ли связна, то эта форма также правоинвариантна тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathfrak{g}$ след оператора $\operatorname{ad} x$ равен нулю.

2. а) Выпишите левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля в глобальных координатах на группе Ли $GL_2(\mathbb{R})$. **б)** Выпишите операцию умножения, левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля в экспоненциальных координатах для группы Гейзенберга верхнетреугольных матриц 3×3. **в)** Тот же вопрос для группы аффинных преобразований плоскости.

3. а) Докажите, что для нильпотентной группы Ли экспоненциальное отображение открыто и сюръективно. **б)** Приведите примеры, когда эти условия нарушаются.

4. а) Докажите, что всякая связная компактная нильпотентная группа Ли абелева. **б)** Докажите, что всякая такая группа есть $S^1 \times \ldots \times S^1$ (*Указание:* односвязная накрывающая такой группы есть $\mathbb{R}^n$, а сама группа, таким образом, есть фактор $\mathbb{R}^n$ по дискретной подгруппе).

5. а) Найдите все связные группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$. **б)** Для каждой из них опишите все конечномерные неприводимые представления.

6*. Приведите пример группы Ли, коммутант которой не является подгруппой Ли.

7*. Докажите, что $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуль Верма не интегрируется до представления группы Ли $SL_2(\mathbb{C})$.

Пусть $\mathbb{C}\langle A, B\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра с образующими A и B (иначе говоря, универсальная обертывающая алгебра свободной алгебры Ли $L(A, B)$). Пополнение $\widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$ алгебры $\mathbb{C}\langle A, B\rangle$ состоит из рядов вида $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, где $a_k \in \mathbb{C}\langle A, B\rangle$ – однородный элемент степени k. Коумножение Δ на алгебре $\mathbb{C}\langle A, B\rangle$ очевидным образом продолжается до коумножения на алгебре $\widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$. Идеал $\widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}_+$ в алгебре $\widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$ состоит из всех рядов вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ (т.е. с нулевым свободным членом). Определим отображение $\exp : \widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}_+ \to 1 + \widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}_+$ и обратное отображение $\log : 1 + \widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}_+ \to \widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}_+$ при помощи соответствующих рядов Тейлора. Элемент $x \in \widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$ называется *примитивным*, если $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Элемент $x \in \widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$ называется *групповым*, если $\Delta(x) = x \otimes x$.

8*. а) Докажите, что коммутатор двух примитивных элементов – примитивный, а произведение двух групповых элементов – групповой элемент. **б)** Найдите все примитивные элементы алгебры $\widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$. **в)** Докажите, что отображение exp осуществляет биекцию между примитивными элементами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$ и групповыми элементами алгебры $\widetilde{\mathbb{C}\langle A, B\rangle}$.

9*. а) Докажите, что $\log(\exp tA \exp sB)$ можно выразить в виде степенного ряда по t и s с коэффициентами из алгебры Ли, порожденной A и B. **б)** *(Формула Кэмпбелла–Хаусдорфа–Дынкина)* Найдите эти коэффициенты явно. **в)** Докажите, что этот ряд сходится при малых t, s.

10*. а) Вычислите дифференциал экспоненциального отображения $\exp : \mathfrak{g} \to G$ в точке $x \in \mathfrak{g}$. **б)** В каких точках этот дифференциал вырожден?