Задачи по комплексному анализу 4, 5.4.2011–19.4.2011

Напомним основные свойства преобразования Фурье $\mathcal{F}f(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi i y x)dx$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в себя.

A. Обратное преобразование $\check{\mathcal{F}}$ задается формулой $\check{\mathcal{F}}g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\exp(2\pi i y x)dy$.

B. Эти преобразования продолжаются (по непрерывности, той же формулой) до изометрий из $L^2(\mathbb{R})$ в себя (формула Планшереля).

C. Операторы сдвига $S_b f(x) := f(x+b)$ и умножения на характер $M_a f(x) := \exp(2\pi i a x)f(x)$ коммутируют следующим образом: $S_b M_a = \exp(2\pi i a b)M_a S_b$ (т.е. порождают действие группы Гейзенберга), $\mathcal{F}S_a\mathcal{F}^{-1} = M_a,\ \mathcal{F}M_a\mathcal{F}^{-1} = S_{-a}$.

D. Операторы дифференцирования $Df(x) := f'(x)$ и умножения $\chi f(x) := 2\pi i x f(x)$ коммутируют так: $\mathcal{F}D\mathcal{F}^{-1} = \chi,\ \mathcal{F}\chi\mathcal{F}^{-1} = -D,\ \check{\mathcal{F}}D\check{\mathcal{F}}^{-1} = -\chi,\ \check{\mathcal{F}}\chi\check{\mathcal{F}}^{-1} = D$.

1. Докажите, что непрерывный линейный оператор $A: \ \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ т.ч. $A\chi = \chi A$, обязательно является оператором умножения на бесконечно дифференцируемую функцию.

2. Пусть $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — обобщенные функции умеренного роста, т.е. непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Например, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni g \mapsto g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}): \ g(f) = \langle g, f\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$. Еще: $\delta(f) = \langle\delta, f\rangle := f(0)$, $\langle \mathrm{sign}(x), f\rangle := \int_0^{\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^0 f(x)dx$, $\langle \mathrm{step}(x), f\rangle := \int_0^{\infty} f(x)dx$, $(x \pm i0)^{-1}(f) := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx\right) \mp \pi i f(0)$. Все непрерывные операции над (быстроубывающими) функциями (например, дифференцирование или преобразование Фурье) индуцируют по сопряженности одноименные операции над обобщенными функциями. Например, $\mathcal{F}g(f) := g(\mathcal{F}f)$, $g'(f) := -g(f')$. Вычислите преобразования Фурье от следующих обобщенных функций: a) $g(x) \equiv 1$; b) $\delta^{(k)}$ (k-я производная дельта-функции); c) $\mathrm{step}(x-a)$; d) $\mathrm{sign}(x)$;
e) x^k; f) $|x|^{2k+1}$; g) $x^{2k}\mathrm{sign}(x)$; h) $(x+i0)^{-1}$; i) $\cos ax^2$; j) $\frac{1}{x^2-r^2\pm i0} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x^2-r^2\pm i\varepsilon}$; k) $|x^2-a^2|$.

3. Вычислите преобразования Фурье следующих обобщенных функций: a) $\mathrm{sign}(\sin ax)$; b) $\mathrm{sign}(\cos ax)$; c) $|\sin ax|$.

4. Вычислите с помощью формулы суммирования Пуассона a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2+a^2}$; b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+a)^2}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

5. Фиксируем τ т.ч. $\mathrm{Im}\tau > 0$. Для целой функции $\phi(z)$ положим $S_b\phi(z) := \phi(z+b)$, $M_a\phi(z) := \exp(\pi i a^2\tau + 2\pi i a z)\phi(z+a\tau)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что a) $S_b M_a = \exp(2\pi i a b)M_a S_b$, т.е. эти операторы задают действие группы Гейзенберга H. b) Эти операторы являются изометриями относительно нормы $\|\phi\|^2 := \int_{\mathbb{C}}\exp\left(\frac{-2\pi y^2}{\mathrm{Im}\,\tau}\right)|f(x+iy)|^2dxdy$, т.е. определены на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, состоящем из целых функций с конечной нормой. c) Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда $Bf(z) := \int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-\pi i(z-x)^2}{\tau}\right)f(x)dx \in \mathcal{H}$. d) оператор $B: \ L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ сплетает действия группы Гейзенберга, т.е. $BS_b = S_b B,\ BM_a = M_a B,\ a, b \in \mathbb{R}$. e) оператор cB является изометрией для некоторой константы c и вычислите c. g) оператор cB является изоморфизмом (т.е. сюръективен).