Лекции по группам и алгебрам Ли – 8,9,10

Группы Ли

Определение 1. *Группой Ли* называется группа G со структурой гладкого многообразия, совместной с групповыми операциями. Это означает, что

(1) отображение умножения $m : G \times G \to G,\ m(g,h) := gh$ гладко;
(2) отображение обращения $s : G \to G,\ s(g) := g^{-1}$ гладко.

В частности, всякий элемент $g \in G$ задает следующие диффеоморфизмы: $L_g : G \to G,\ h \mapsto gh$ и $R_g : G \to G,\ h \mapsto hg$.

Примеры.

(1) Любая дискретная (в частности, конечная) группа;
(2) Группа $\mathbb{R}$ по сложению;
(3) группа $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел по умножению;
(4) группа S^1 комплексных чисел, по модулю равных 1, по умножению;
(5) группа $GL_n(\mathbb{R})$ или $GL_n(\mathbb{C})$ обратимых вещественных или комплексных матриц по умножению;
(6) группа $SL_n(\mathbb{R})$ или $SL_n(\mathbb{C})$ вещественных или комплексных матриц с единичным определителем;

Определение 2. *Гомоморфизмом* групп Ли называется гладкий гомоморфизм групп. Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Примеры.

(1) Отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ t \mapsto e^t$ есть изоморфизм групп Ли.
(2) Отображение $\mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ есть гомоморфизм групп Ли с ядром $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
(3) Отображение $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ есть гомоморфизм групп Ли с ядром $SL_n(\mathbb{R})$.

Определение 3. *Подгруппой Ли* в группе Ли называется замкнутое гладкое подмногообразие, замкнутое относительно операции умножения.

Примеры.

(1) Подгруппа $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ или $SL_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$;
(2) Подгруппа $N_+(n) \subset GL_n$, состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали;
(3) Подгруппа $B_+(n) \subset GL_n$, состоящая из обратимых верхнетреугольных матриц;
(4) Подгруппа $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, состоящая из операторов, сохраняющих евклидово скалярное произведение (т.е. таких A, что $A^{-1} = A^T$), а также $SO_n(\mathbb{R}) := O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$;
(5) Более общо, $O_{k,m}(\mathbb{R}) \subset GL_{k+m}(\mathbb{R})$ – подгруппа, сохраняющая квадратичную форму сигнатуры (n,k);

Предложение 1. *Пусть H – подгруппа Ли в группе Ли G. Тогда на множестве смежных классов G/H имеется естественная структура гладкого многообразия, такая, что отображение факторизации $G \to G/H$ есть локально тривиальное расслоение со слоем H. Если подгруппа H нормальна, то многообразие G/H есть группа Ли.*

Доказательство. Выберем трансверсальную площадку W к подгруппе $H \subset G$ в единице. Тогда отображение $W \times H \to G, w \times h \mapsto wh$ – открытое вложение. Следовательно, отображение факторизации $G \to G/H$ является тривиальным расслоением в окрестности единицы группы G, а значит, и в окрестности любой другой точки $g \in G$, так как диффеоморфизм L_g переводит единицу в точку $g \in G$, а слои отображения факторизации снова в слои отображения факторизации.

Отображение действия группы Ли G слева на G/H, $G \times G/H \to G/H$, гладко. Поэтому, если подгруппа Ли H нормальна, то многообразие G/H есть группа Ли. $\square$

Для групп Ли также имеет место стандартная Теорема о гомоморфизме:

Предложение 2. *Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ – сюръективный гомоморфизм групп Ли. Тогда $G_2 \simeq G_1/\operatorname{Ker}\varphi$.*

Определение 4. *Представлением* группы Ли G в векторном пространстве V называется гомоморфизм групп Ли $\rho : G \to GL(V)$.

Примеры.

(1) Тавтологическое представление $GL_n(\mathbb{R})$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.
(2) Присоединенное представление $GL_n(\mathbb{R})$ в пространстве $n\times n$-матриц сопряжениями.
(3) Ограничение этих представлений на какую-либо подгруппу Ли в $GL_n(\mathbb{R})$.

Классификация одномерных групп Ли

Предложение 3. *Всякая одномерная группа Ли изоморфна $\mathbb{R}$ по сложению или S^1 по умножению.*

Доказательство. Всякое одномерное связное многообразие есть $\mathbb{R}$ или S^1. Пусть $G=\mathbb{R}$ как многообразие. Введем на $G=\mathbb{R}$ координату так, что $e=0$. Тогда операция умножения есть гладкая функция двух переменных $x*y=m(x,y)$. Рассмотрим векторное поле на $G=\mathbb{R}$, значение которого в точке $x\in\mathbb{R}$ равно $\xi(x)=\frac{\partial m}{\partial y}(x,0)$. Выпрямим это векторное поле (т.е. введем новые координаты, в которых $\xi(x)=1$). Тогда в этих координатах $m(x,0)=x$ и

$$\frac{\partial m}{\partial y}(x,y)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{x*(y+t)-x*y}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{x*y*t-x*y}{t}\frac{x*(y+t)-x*y}{x*y*t-x*y}=1.$$

Следовательно, $m(x,y)=x+y$.

Аналогичное рассуждение можно провести для группы, диффеоморфной S^1. Другой способ доказательства в этом случае – сведение к случаю $G=\mathbb{R}$ при помощи теоремы 1. □

Функтор Lie

Определение 5. Векторное поле ξ на группе Ли G называется *левоинвариантным*, если $L_{g*}\xi=\xi$ для всякого $g\in G$. Аналогично определяются *правоинвариантные* векторные поля.

Предложение 4. *Всякое левоинвариантное (правоинвариантное) векторное поле однозначно определено своим значением в точке $e\in G$.*

Доказательство. Пусть ξ – левоинвариантное векторное поле. Тогда $\xi(g)=L_{g*}\xi(e)$, следовательно, оно задано однозначно вектором $\xi(e)\in T_eG$. Обратно, пусть $\xi_0\in T_eG$, тогда $\xi(g):=L_{g*}\xi_0$ есть левоинвариантное векторное поле: имеем

$$(L_{h*}\xi)(g)=L_{h*}L_{h^{-1}g*}\xi_0=L_{g*}\xi_0=\xi(g).$$

□

На касательном пространстве $\operatorname{Lie}G:=T_eG$ группы Ли G в единице (это пространство часто обозначается готической буквой $\mathfrak{g}$) имеется естественная структура алгебры Ли. Мы дадим несколько эквивалентных определений.

Определение 6. Введем координаты в окрестности единицы группы, так, что точка $e\in G$ имеет координату 0. Тогда в этих координатах ряд Тейлора для операции умножения в группе G имеет вид $m(x,y)=x+y+B(x,y)+o(x,y)$, где $B(x,y)$ – некоторая билинейная операция $T_eG\times T_eG\to T_eG$ (в самом деле, $m(x,0)=x$, $m(0,y)=y$). Положим $[x,y]:=B(x,y)-B(y,x)$.

Корректность этого определения следует из следующего более инвариантного определения:

Определение 7. Пусть $x,y\in\mathfrak{g}$ и пусть $g_x(t),g_y(s)$ – какие-нибудь гладкие пути в группе, такие, что $g_x(0)=g_y(0)=e$ и $g_x'(0)=x$, $g_y'(0)=y$. Тогда $[x,y]=\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}g_x(t)g_y(s)g_x(t)^{-1}g_y(s)^{-1}$.

Тождество Якоби для операции $[,]$ следует из тождества Якоби для коммутатора векторных полей посредством следующего эквивалентного определения:

Определение 8. Пусть $x, y \in \mathfrak{g}$ и пусть ξ_x, ξ_y – соответствующие правоинвариантные векторные поля. Тогда $[\xi_x, \xi_y]$ – тоже правоинвариантное векторное поле, и $[x, y] = [\xi_x, \xi_y](e)$.

Можно также определить касательную алгебру Ли при помощи присоединенного представления:

Определение 9. Определим *присоединенное* представление группы Ли G в пространстве T_eG следующим образом: $\mathrm{Ad}(g)y = d_e(L_g R_{g^{-1}})y$. Тогда $[x, y] = \mathrm{ad}\, x(y) := d_e(\mathrm{Ad})x(y)$.

Примеры.

(1) $\mathrm{Lie}\,\mathbb{R} = \mathrm{Lie}\, S^1 = \mathbb{R}$

(2) $\mathrm{Lie}\, GL_n = \mathfrak{gl}_n$, $\mathrm{Lie}\, SL_n = \mathfrak{sl}_n$;

(3) $\mathrm{Lie}\, SO_n = \mathfrak{so}_n$.

Предложение 5. *Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда отображение $d_e\varphi : T_eG_1 \to T_eG_2$ является гомоморфизмом алгебр Ли.*

Доказательство. Это очевидно из второго определения. $\square$

Таким образом, сопоставление группе Ли G алгебры Ли $\mathrm{Lie}\, G$ *функториально*, т.е. Lie есть функтор из категории групп Ли в категорию алгебр Ли. Это также определяет следующий функтор из категории представлений фиксированной группы Ли G в категорию представлений ее алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$: представлению (V, ρ) группы Ли ставится в соответствие представление $(V, d_e\rho)$ алгебры Ли.

Представления одномерных групп Ли

Предложение 6. *Всякое конечномерное представление группы Ли $\mathbb{R}$ имеет вид $\rho(t) = \exp(tA)$, где $A : V \to V$ – произвольный линейный оператор. Представления $\rho_1(t) = \exp(tA_1)$ и $\rho_2(t) = \exp(tA_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда операторы A_1 и A_2 отличаются сопряжением.*

Доказательство. Пусть $\rho : \mathbb{R} \to GL(V)$ – представление группы Ли $\mathbb{R}$. Положим $A = \rho'(0)$. Тогда матричнозначная функция $\rho(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\rho(t+s) - \rho(t)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{(\rho(s) - \rho(0))\rho(t)}{s} = \rho'(0)\rho(t) = A\rho(t),$$

с начальным условием $\rho(0) = E$. Отсюда $\rho(t) = \exp(tA)$. Представления $\rho_1(t) = \exp(tA_1)$ и $\rho_2(t) = \exp(tA_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда операторы $\rho_1(t) = \exp(tA_1)$ и $\rho_2(t) = \exp(tA_2)$ отличаются сопряжением при помощи постоянной матрицы, что равносильно тому, что операторы A_1 и A_2 отличаются сопряжением. $\square$

Предложение 7. *Всякое конечномерное представление группы Ли S^1 есть прямая сумма одномерных представлений вида $\rho(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Всякое представление S^1 есть представление группы $\mathbb{R}$, ядро которого содержит $\mathbb{Z}$. Т.е. всякое такое представление есть $\rho(\varphi) = \exp(2\pi i\varphi A)$, такое, что $\exp(2\pi i A) = 1$. Но это выполнено если и только если A – диагонализумая матрица с целочисленными собственными значениями. $\square$

Группы Ли SU_2 и $SO_3(\mathbb{R})$

Определение 10. Пусть $\langle , \rangle$ – положительно определенное эрмитово скалярное произведение на пространстве $\mathbb{C}^2$. Группа Ли SU_2 состоит из всех линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^2$, сохраняющих $\langle , \rangle$ (т.е. таких $A \in GL_2(\mathbb{C})$, что $\overline{A}^T = A^{-1}$) и имеющих определитель 1.

Предложение 8. *SU_2 как гладкое многообразие является 3-мерной сферой.*

Доказательство. В самом деле, если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\det A = 1$, то $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Отсюда $a = \bar{d}$, $b = -\bar{c}$. Т.е. $A \in SU_2$ тогда и только тогда, когда $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ и $\det A = |a|^2 + |b|^2 = 1$. □

Предложение 9. *Присоединенное представление группы Ли SU_2 есть двулистное накрытие $SU_2 \to SO_3$.*

Доказательство. $\operatorname{Lie} SU_2 = \mathfrak{su}_2 = \{A \in Mat_2(\mathbb{C}) |\ \overline{A}^T = -A\}$. Это 3-мерное вещественное пространство с положительно определенным скалярным произведением $(A, B) = -\operatorname{tr} AB$. Группа SU_2 действует на этом пространстве сопряжениями, и, следовательно, сохраняет скалярное произведение. Таким образом, $\operatorname{Ad}(SU_2) \subset SO_3(\mathbb{R})$. Ядро гомоморфизма Ad состоит из скалярных матриц, т.е. из $\pm E$. Осталось показать, что гомоморфизм Ad сюръективен. Но образ гомоморфизма Ad содержит окрестность единицы (из дискретности ядра), а следовательно, открыт. Следовательно, группа SO_3 есть объединение открытых смежных классов по подгруппе $\operatorname{Ad}(SU_2)$. Так как группа SO_3 связна, такой смежный класс ровно один. □

Связность и односвязность

Предложение 10. *Связная компонента единицы G_0 группы Ли G является подгруппой Ли в G, $\operatorname{Lie} G_0 = \operatorname{Lie} G$ (очевидно).*

Доказательство. Пусть $g, h \in G_0$. Тогда существуют такие непрерывные пути $g(t), h(t) \in G_0$, что $g(t) = h(t) = e$ и $g(1) = g$, $h(1) = h$. Тогда $g(t)h(t)$ есть непрерывный путь в группе G, соединяющий e с gh. Следовательно $gh \in G_0$. Аналогично доказывается, что $g^{-1} \in G_0$. □

Теорема 1. *Всякая связная группа Ли G имеет единственную (с точностью до изоморфизма) универсальную накрывающую, т.е. такую связную односвязную группу Ли $\tilde{G}$ и сюръективный гомоморфизм $\tilde{G} \to G$ с дискретным ядром.*

Доказательство. Рассмотрим многообразие $\tilde{G}$, состоящее из классов эквивалентности путей $g(t)$ в группе G с началом в единице ($g(0) = e$) по гомотопиям сохрняющим конец $g(1)$. Это универсальное накрытие многообразия G. Введем на этом многообразии структуру группы Ли следующим образом:

$$g(t)h(t) = h(2t) \text{ при } t \leq \frac{1}{2},\ g(t)h(t) = g(2t-1)h(1) \text{ при } t \geq \frac{1}{2}.$$

Тогда $g(t) \mapsto g(1)$ есть гомоморфизм групп Ли $\tilde{G} \to G$ с ядром $\pi_1(G)$. Единственность универсальной накрывающей следует из теоремы о накрывающей гомотопии. □

Примеры.

(1) $\mathbb{R} \to S^1$.
(2) $SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$.

Приведем несколько примеров вычисления фундаментальных групп групп Ли.

Предложение 11. *Группа $SO_n(\mathbb{R})$ связна. $\pi_1(SO_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при $n \geq 3$.*

Доказательство. Группа $SO_n(\mathbb{R})$ действует вращениями на сфере S^{n-1}. Стабилизатор точки на сфере при таком действии есть $SO_{n-1}(\mathbb{R})$. Получается расслоение $SO_n(\mathbb{R}) \to S^{n-1}$ со слоем $SO_{n-1}(\mathbb{R})$. Имеем точную гомотопическую последовательность:

$$\pi_2(S^{n-1}) \to \pi_1(SO_{n-1}(\mathbb{R})) \to \pi_1(SO_n(\mathbb{R})) \to \pi_1(S^{n-1}) \to \pi_0(SO_{n-1}(\mathbb{R})) \to \pi_0(SO_n(\mathbb{R})) \to \pi_0(S^{n-1}).$$

Так как $n > 3$, то $\pi_2(S^{n-1}) = \pi_1(S^{n-1}) = \pi_0(S^{n-1})$, и следовательно $\pi_1(SO_{n-1}(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(SO_n(\mathbb{R}))$ и $\pi_0(SO_{n-1}(\mathbb{R})) \simeq \pi_0(SO_n(\mathbb{R}))$. Таким образом, по индукции получаем, что группа $SO_n(\mathbb{R})$ связна и $\pi_1(SO_n(\mathbb{R})) = \pi_1(SO_3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Предложение 12. *Группа* $SL_2(\mathbb{R})$ *связна.* $\pi_1(SL_2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Группа $SL_2(\mathbb{R})$ действует на многообразии $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ со стабилизатором $N_+(2)$. Получается расслоение $SL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ со слоем $N_+(2)$. Имеем точную гомотопическую последовательность:

$$\pi_2(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \to \pi_1(N_+(2)) \to \pi_1(SL_2(\mathbb{R})) \to \pi_1(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \to \pi_0(N_+(2)) \to \pi_0(SL_2(\mathbb{R})) \to \pi_0(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}).$$

Так как $N_+(2)$ стягиваема, а $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ гомотопически эквивалентно окружности, получаем, что группа $SL_2(\mathbb{R})$ связна и $\pi_1(SL_2(\mathbb{R})) = \pi_1(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) = \mathbb{Z}$. □

Мера Хаара и полная приводимость представлений компактных групп Ли

Предложение 13. *На всякой группе Ли существует левоинвариантная (соотв., правоинвариантная) мера (дифференциальная форма старшей степени). Эта мера едиственна с точностью до пропорциональности.*

Доказательство. Зафиксируем $\omega_0 \in \Lambda^{top}T_e^*G$. Положим $\omega(g) := L_{g^{-1}}^*\omega_0 \in T_gG$. Тогда форма ω левонвариантна: имеем

$$(L_h^*\omega)(g) = L_h^*L_{(hg)^{-1}}^*\omega_0 = L_{(hg)^{-1}h}^*\omega_0 = L_{g^{-1}}^*\omega_0 = \omega(g).$$

С другой стороны, для всякой левоинвариантной формы ω выполнено $\omega(g) := L_{g^{-1}}^*\omega(e)$ (т.е. такая форма однозначно задается своим значением в единице группы). Поэтому такая форма единственна с точностью до пропорциональности. Аналогично строится правоинвариантная мера. □

Примеры.

(1) На аддитивной группе $\mathbb{R}$ 1-форма dt лево- и правоинвариантна.
(2) На группе S^1 1-форма $d\varphi$ лево- и правоинвариантна.

Теорема 2. *Всякое конечномерное представление компактной группы Ли вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ – представление группы Ли G, и пусть $W \subset V$ – подпредставление. Рассмотрим какой-нибудь проектор на это подпредставление (т.е. такой оператор $p : V \to V$, что $\operatorname{Im} p = W$ и $p|_W = \mathrm{id}$). Пусть dg – левоинвариантная мера на группе Ли G, такая, что $\int_G dg = 1$ (такая существует, поскольку группа G компактна). Тогда оператор $P := \int_G \rho(g)p\rho(g^{-1})dg$ – инвариантный проектор на подпредставление W. В самом деле, $\operatorname{Im}\rho(g)p\rho(g^{-1}) = W$, поскольку W – подпредставление, а значит, и $\operatorname{Im} P = W$. Далее, $\rho(g)p\rho(g^{-1})|_W = \mathrm{id}$, следовательно, и $P|_W = \mathrm{id}$, так как $\int_G dg = 1$. Наконец, для любого $h \in G$ из левой инвариантности меры имеем

$$\rho(h)P\rho(h)^{-1} = \int_G \rho(h)\rho(g)p\rho(g^{-1})\rho(h)^{-1}dg = \int_G \rho(hg)p\rho((hg)^{-1})dg =$$
$$= \int_G \rho(hg)p\rho((hg)^{-1})d(hg) = \int_G \rho(g)p\rho(g^{-1})dg = P.$$

Следовательно, $\operatorname{Ker} P \subset V$ – подпредставление, и $V = W \oplus \operatorname{Ker} P$. □